1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит $N = 3$; б) произведение числа очков не превосходит $N = 3$; в) произведение числа очков делится на $N = 3$.

Решение:

$C_6^1 = 6$ способами можно выбрать цифру на одной игральной кости;

$C_6^1 = 6$ способами можно выбрать цифру на другой игральной кости.

Таким образом, общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

а) Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:

2 очка: $(1,1)$

3 очка: $(1,2),(2,1)$

Всего: 3 благоприятствующих исхода.

По классическому определению вероятности:

$p_1 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ – вероятность того, что сумма очков не превзойдет 3.

б) Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:

1 очко: $(1,1)$

2 очка: $(1,2),(2,1)$

3 очка: $(1,3),(3,1)$

Всего: 5 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности:

$p_2 = \frac{5}{36}$ – вероятность того, что произведение очков не превзойдет 3.

в) Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:

3 очка: $(1,3),(3,1)$

6 очков: $(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)$

9 очков: $(3,3)$

12 очков: $(2,6),(6,2),(3,4),(4,3)$

15 очков: $(3,5),(5,3)$

18 очков: $(3,6),(6,3)$

21 очко: –

24 очка: $(4,6),(6,4)$

27 очков: –

30 очков: $(5,6),(6,5)$

33 очка: –

36 очков: $(6,6)$

39, 42, …: –

Всего: 20 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности:

$p_3 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ – вероятность того, что произведение очков делится 3.

Ответ: а) $p_1 = \frac{1}{12}$, б) $p_2 = \frac{5}{36}$, в) $p_3 = \frac{5}{9}$

2) Имеются изделия четырех сортов $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 4$. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них $m_1 = 1$ первосортное, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$ и $m_4 = 3$ второго, 3-го и четвертого сорта соответственно.

Решение: Всего: $n = 1+2+3+4 = 10$ изделий. Размер выборки: $m = 1+1+2+3 = 7$

$C_{10}^7 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$ способами можно выбрать 7 изделий из 10.

$C_1^1 = 1$ способом можно выбрать изделие 1-го сорта;

$C_2^1 = 2$ способами можно выбрать изделие 2-го сорта;

$C_3^2 = 3$ способом можно выбрать два изделия 3-го сорта;

$C_4^3 = 4$ способами можно выбрать три изделия 4-го сорта.

$C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^3 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ – способами можно выбрать искомую комбинацию изделий.

По классическому определению вероятностей:

$p = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^7} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ – искомая вероятность.

Ответ: $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$

3) Среди $n = 10$ лотерейных билетов $k = 6$ выигрышных. Наудачу взяли $m = 4$ билета. Определить вероятность того, что среди них $l = 2$ выигрышных.

Решение:

$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24} = 210$ способами можно выбрать 4 билета из 10-ти.

$C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способами можно выбрать два выигрышных билета из 6-ти;

$C_4^2 = 6$ способами можно выбрать два безвыигрышный билета из 4-х.

$C_6^2 \cdot C_4^2 = 15\cdot 6 = 90$ способами можно выбрать искомую комбинацию билетов.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ – искомая вероятность.

Ответ: $p = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286$

4) В лифт $k = 6$- этажного дома сели $n = 4$ пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайне мере двое сошли на одном этаже.

Решение:

$C_6^1 = 6$ способами может выйти каждый пассажир из лифта.

$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 625$ способами могут выйти 4 пассажира из лифта

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут из лифта на разных этажах.

$A_5^4 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ способами можно разместить пассажиров по трем разным этажам (с учетом перестановок пассажиров).

По классическому определению вероятностей:

$P(A)=\frac{A_5^4}{C_5^1\cdot C_5^1\cdot C_5^1\cdot C_5^1}=\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$ – вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

б) Рассмотрим событие: $\overline{A}$ – по крайне мере двое сошли на одном этаже. События A и $\overline{A}$ являются противоположными, поэтому $P(A)+P(\overline{A})=1$, следовательно:

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{24}{125}=\frac{101}{125}$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $P(A)=\frac{24}{125}=0{,}192$, б) $P(B)=\frac{101}{125}=0{,}808$.

5) В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$.

Решение: Выполним чертеж:

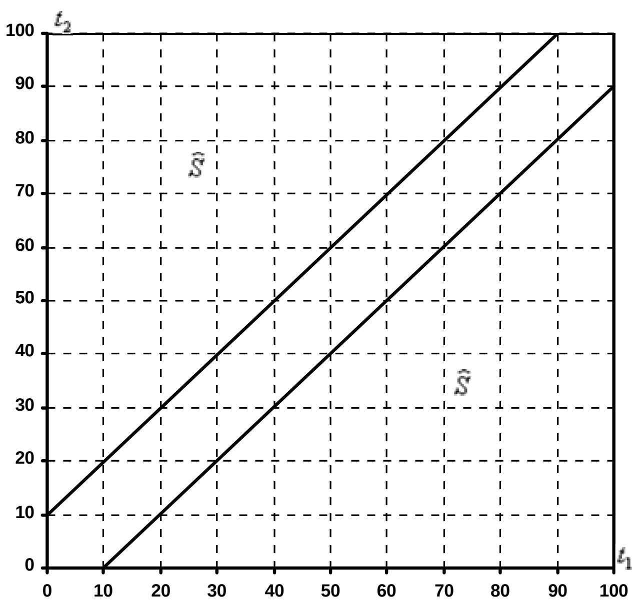
Общему числу исходов соответствует длина единичного отрезка $l=1$.

Благоприятствующему числу исходов соответствует длина $\hat{l}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

По геометрическому определению вероятностей:

$p=\frac{\hat{l}}{l}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $\frac{1}{4}$.

Ответ: $p=\frac{1}{2}$



6) Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от $T_1=900$ до $T_2=1000$. Одно из событий длится 10 мин., другое – $t=10$ мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» во времени; б) «не перекрываются».

Решение: Промежуток времени: $\Delta t=T_2-T_1=100$. Выполним чертеж.

Общему числу исходов соответствует площадь $S=100\cdot 100=10000$

б) Благоприятствующему числу исходов соответствует площадь

$\widehat{S} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 90 = 8100$.

По геометрическому определению вероятности:

$p = \frac{\widehat{S}}{S} = \frac{8100}{10000} = 0{,}81$ – вероятность того, что события «не перекрываются» во времени.

а) Найдем вероятность противоположного события:

$\overline{p} = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$ – вероятность того, что события «перекрываются» во времени.

Ответ: а) $p = 0{,}19$, б) $\overline{p} = 0{,}81$.

7) В круге радиуса $R = 11$ наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны $S_1 = 2{,}25$ и $S_2 = 3{,}52$

Решение: Вычислим площадь круга:

$S_{кр} = \pi R^2 = \pi 11^2 = 121\pi$

Суммарная площадь непересекающихся фигур:

$S = S_1 + S_2 = 2{,}25 + 3{,}52 = 5{,}77$.

По геометрическому определению вероятности:

$p = \frac{S}{S_{кр}} = \frac{5{,}77}{121\pi} \approx 0{,}0152$ – искомая вероятность.

Ответ: $p = \frac{5{,}77}{121\pi} \approx 0{,}0152$

8) В двух партиях $k_1 = 71\%$, $k_2 = 47\%$ доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

Решение: Из условия следует, что:

$p_1 = 0{,}71$, $p_2 = 0{,}47$ – вероятности того, что изделие из соответствующей партии является доброкачественным. Тогда, вероятности того, что изделие из соответствующей партии является бракованным:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}71 = 0{,}29$;

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$.

а) Рассмотрим события:

A – хотя бы одно изделие является бракованным;

$\overline{A}$ – оба изделия доброкачественны.

События A и $\overline{A}$ являются противоположными, поэтому: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

По теореме умножения независимых событий: $P(\overline{A}) = p_1 p_2 = 0{,}71 \cdot 0{,}47 = 0{,}3337$.

Таким образом:

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3337 = 0{,}6663$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие:

B – оба изделия бракованны.

По теореме умножения независимых событий:

$P(B) = q_1 q_2 = 0{,}29 \cdot 0{,}53 = 0{,}1537$ – искомая вероятность.

в) Рассмотрим событие:

C – одно изделие бракованное и одно доброкачественное.

По теоремам сложения несовместных и умножения независимых событий:

$P(C) = p_1 q_2 + q_1 p_2 = 0{,}71 \cdot 0{,}53 + 0{,}29 \cdot 0{,}47 = 0{,}3763 + 0{,}1363 = 0{,}5126$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $P(A) = 0{,}6663$, б) $P(B) = 0{,}1537$, с) $P(C) = 0{,}5126$.

9) Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком $p_1 = 0{,}61$, вторым $p_2 = 0{,}55$. Первый сделал $n_1 = 2$ выстрела, второй $n_2 = 3$ выстрела. Определить вероятность того, что цель не поражена.

Решение: найдем вероятность промаха для соответствующих стрелков:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}61 = 0{,}39;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}55 = 0{,}45.$

По теореме умножения независимых событий:

$p = q_1 q_1 q_1 q_2 q_2 = (0{,}39)^2 \cdot (0{,}45)^3 = 0{,}01386$ – вероятность того, что цель не поражена.

Ответ: $p \approx 0{,}01386$

10) Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок A, второй – B, третий – A и т.д. Найти вероятность того, что выиграл A до $k = 4$ броска.

Решение: $p = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения герба;

$q = \frac{1}{2}$ – вероятность выпадения цифры.

Рассмотрим несовместные исходы, соответствующие выигрышу игрока A:

1) $p_1 = p = \frac{1}{2}$;

3) $p_3 = qqp = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

По теореме сложения несовместных событий:

$p = p_1 + p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ – вероятность того, что игрок A выиграет до 10 броска.

Найдем вероятность выигрыша каждого игрока при сколь угодно длительной игре.

Вероятность выигрыша игрока A:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = (*)$$

Используем формулу для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{x_1}{1 - g}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$ – искомая вероятность.

Вероятность выигрыша игрока B:

$P(B)=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Ответ: $p=\frac{5}{8}=0,625$, $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$

12) Из 1000 ламп соответствующим партиям принадлежат $n_1=100$, $n_2=250$, $n_3=650$ ламп. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что лампа – бракованная.

Решение: Всего: 1000 ламп. Тогда:

$p_1=\frac{100}{1000}=0,1$, $p_2=\frac{250}{1000}=0,25$, $p_3=\frac{650}{1000}=0,65$ – вероятность выбора лампы из соответствующей партии.

Из условия следует, что:

$\overline{p}_1=0,06$, $\overline{p}_2=0,05$, $\overline{p}_3=0,04$ – вероятности того, что лампа соответствующей партии является бракованной.

По формуле полной вероятности:

$p=p_1\overline{p}_1+p_2\overline{p}_2+p_3\overline{p}_3=0,1\cdot 0,06+0,25\cdot 0,05+0,65\cdot 0,04=$

$=0,006+0,0125+0,026=0,0445$

– вероятность того, что наудачу извлеченная лампа будет бракованной.

Ответ: $p=0,0445$

13) В первой урне $N_1=4$ белых и $M_1=1$ черный шар, во второй $N_2=2$ белых и $M_2=5$ черный. Из первой во вторую урну переложено $K=3$ шара, затем из второй урны извлечен один шар. Найти вероятность того, что выбранный из второй урны шар – белый.

Решение: Всего: 4 +1 = 5 шаров в первой урне.

$C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно выбрать 3 шара из первой урны.

Рассмотрим следующие несовместные исходы:

№ исхода	Извлечено из первой урны		Соответствующая вероятность	Во 2-ой урне стало		Вероятность извлечения белого шара из второй урны
	белых	черных		белых	черных	
1	3	0	$\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	5	5	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
2	2	1	$\frac{C_4^2\cdot C_1^1}{C_5^3}=\frac{6\cdot 1}{10}=\frac{3}{5}$	4	6	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

По теоремам сложения несовместных и умножения зависимых событий:

$p=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{11}{25}$ – вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар.

Ответ: $p=\frac{11}{25}=0,44$

14) В альбоме $k=8$ чистых и $l=10$ гашеных марок. Из них наудачу извлекают $m=3$ марки (среди которых могут быть и чистые и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается $n=2$ марки. Определить вероятность, что все n марок чистые.

Решение: Всего: 8 + 10 = 18 марок в альбоме.

$C_{18}^{3}=\frac{18!}{15!\cdot 3!}=\frac{16\cdot 17\cdot 18}{6}=816$ способами можно выбрать 3 марки из альбома;

$C_{18}^{2}=\frac{18!}{16!\cdot 2!}=\frac{17\cdot 18}{2}=153$ способами можно выбрать 2 марки из альбома;

№ исхода	Извлечены марки		Соответствующая вероятность	Стало марок		Вероятность того, что все извлеченные марки чистые
	чистые	гашеные		чистых	гашеных	
1	3	0	$\frac{C_8^3\cdot C_{10}^0}{C_{18}^3}=\frac{56}{816}$	5	13	$\frac{C_5^2}{C_{18}^2}=\frac{10}{153}$
2	2	1	$\frac{C_8^2\cdot C_{10}^1}{C_{18}^3}=\frac{28\cdot 10}{816}=\frac{280}{816}$	6	12	$\frac{C_6^2}{C_{18}^2}=\frac{15}{153}$
3	1	2	$\frac{C_8^1\cdot C_{10}^2}{C_{18}^3}=\frac{8\cdot 45}{816}=\frac{360}{816}$	7	11	$\frac{C_7^2}{C_{18}^2}=\frac{21}{153}$
4	0	3	$\frac{C_8^0\cdot C_{10}^3}{C_{18}^3}=\frac{120}{816}$	8	10	$\frac{C_8^2}{C_{18}^2}=\frac{28}{153}$

По теоремам сложения несовместных и умножения зависимых событий:

$p=\frac{56}{816}\cdot\frac{10}{153}+\frac{280}{816}\cdot\frac{15}{153}+\frac{360}{816}\cdot\frac{21}{153}+\frac{120}{816}\cdot\frac{28}{153}=\frac{15680}{124848}=\frac{980}{7803}\approx 0{,}1256$ – вероятность того, что обе извлеченные марки будут чистыми.

Ответ: $p=\frac{980}{7803}\approx 0{,}1256$

15) В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов: $m_1=50$, $m_2=30$, $m_3=20$. Среди изделий соответствующих заводов $n_1=70\%$, $n_2=80\%$, $n_3=90\%$ первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено 1-ым заводом.

Решение: Всего: 100 изделий. Тогда:

$p_1=\frac{50}{100}=0{,}5$, $p_2=\frac{30}{100}=0{,}3$, $p_3=\frac{20}{100}=0{,}2$ – вероятности того, что изделие выпущено соответствующим заводом.

Из условия следует, что:

$\overline{p}_1=0{,}7$, $\overline{p}_2=0{,}8$, $\overline{p}_3=0{,}9$ – вероятности того, что изделие соответствующего завода является первосортным.

По формуле полной вероятности:

$\widehat{p}=p_1\overline{p}_1+p_2\overline{p}_2+p_3\overline{p}_3=0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}9=$

$=0{,}35+0{,}24+0{,}18=0{,}77$

– вероятность того, что купленное изделие оказалось первосортным.

По формуле Байеса:

$p = \frac{p_1 \overline{p}_1}{\widehat{p}} = \frac{0,35}{0,77} = \frac{5}{11}$ – вероятность того, что купленное первосортное изделие выпущено 1-ым заводом.

Ответ: $p = \frac{5}{11} \approx 0,45$

16) Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет $n = 3$ раза. Определить вероятность того, что цифра выпадает $m = 2$ раза.

Решение: $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ – вероятности выпадения герба и цифры соответственно.

Используем формулу Бернулли:

$P_l^k = C_l^k p^k q^{l-k}$, в данной задаче:

$P_4^2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ – вероятность того, что в первых четырех испытаниях два раза выпадет герб и два раза цифра.

$p_5 = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в 5-ом испытании выпадет третий герб.

По теореме умножения независимых событий:

$p = P_4^2 \cdot p_5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ – искомая вероятность.

Ответ: $p = \frac{3}{16} = 0,1875$

17) Вероятность выигрыша в лотерею на 1 билет равна $p = 0,3$. Куплено $n = 10$ билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Решение: Найдем наивероятнейшее количество выигравших билетов (математическое ожидание):

$M = np = 10 \cdot 0,3 = 3$

Найдем соответствующую вероятность, используем формулу Бернулли:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данном случае:

$P_{10}^3 = C_{10}^3 (0,3)^3 (0,7)^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot (0,3)^3 (0,7)^7 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} \cdot (0,3)^3 (0,7)^7 \approx 0,2668$ – искомая вероятность.

Ответ: $M \approx 3$, $P_{10}^3 \approx 0,2668$

18) На каждый лотерейный билет с вероятностью $p_1 = 0,1$ может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью $p_2 = 0,2$ – мелкий выигрыш и с вероятностью $p_3 = 0,7$ билет может оказаться без выигрыша. Куплено $n = 15$ билетов. Определить вероятность получения $n_1 = 1$ крупного выигрыша и $n_2 = 2$ мелких.

Решение: Используем полиномиальное распределение вероятности.

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}$$

В данном случае:

$P_{15}(1,2,12) = \frac{15!}{1!2!12!}(0,1)^1 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,7)^{12} \approx 0,0755734$ – вероятность того, что из 15 билетов на 1 будет получен крупный выигрыш и на 2 – мелкие выигрыши.

Ответ: $P_{15}(1,2,12) \approx 0,0755734$

19) Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна $p = 0,002$. Поступило $n = 1000$ вызовов. Определить вероятность $m = 7$ «сбоев».

Решение: Используем формулу Пуассона:

$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$ – среднее количество сбоев;

$m = 7$.

Таким образом:

$P_7 = \frac{2^7}{7!} \cdot e^{-2} \approx 0,0034$ – вероятность того, что будет ровно 7 сбоев.

Ответ: $P_7 \approx 0,0034$

20) Вероятность наступления некоторого события в каждом из $n = 100$ независимых испытаний равна $p = 0,8$. Определить вероятность того, что число m наступления событий удовлетворяет неравенству $80 \le m \le 90$.

Решение: Используем интегральную теорему Лапласа:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(k_2) - \Phi(k_1)$;

В данной задаче:

$n = 100$ – всего испытаний;

$p = 0,8$ – вероятность наступления события в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$ – вероятность ненаступления события в каждом испытании.

По соответствующим формулам найдем k_1 и k_2:

$$k_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2,5;$$

$$k_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{0}{\sqrt{16}} = 0.$$

Таким образом:

$P_{100}(80 \le m \le 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(0) = 0,4938 - 0 = 0,4938$ – вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит от 80 до 90 раз.

Ответ: $P_{100}(80 \le m \le 90) \approx 0,4938$

21) Дана плотность распределения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-2{,}5}, x\in[2{,}5;4],\\ 0, x\notin[2{,}5;4].\end{cases}$ случайной величины X. Найти параметр γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $3<X<3{,}3$.

Решение: Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В данном случае:

$$\int\limits_{2{,}5}^{4}\frac{1}{\gamma-2{,}5}=1\Rightarrow\frac{1}{\gamma+1}(x)\Big|_{2{,}5}^{4}=1\Rightarrow\frac{4-2{,}5}{\gamma-2{,}5}=1\Rightarrow\gamma-2{,}5=1{,}5\Rightarrow\gamma=4$$

Таким образом, функция плотности распределения: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, x\in[2{,}5;4],\\ 0, x\notin[2{,}5;4].\end{cases}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{2}{3}\int\limits_{2{,}5}^{4}xdx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2\right)\Big|_{2{,}5}^{4}=\frac{1}{3}(16-6{,}25)=\frac{1}{3}\cdot 9{,}75=3{,}25$$

Дисперсию вычислим по формуле: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$

В данном случае:

$$D(X)=\frac{2}{3}\int\limits_{2{,}5}^{4}x^2dx-(3{,}25)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_{2{,}5}^{4}-10{,}5625=\frac{2(64-15{,}625)}{9}-10{,}5625=$$

$=10{,}75-10{,}5625=0{,}1875$

Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x<2{,}5$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

Если $2{,}5\le x\le 4$, то $f(x)=\frac{2}{3}$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2{,}5}0dx+\frac{2}{3}\int\limits_{2{,}5}^{x}dx=0+\frac{2}{3}x\ \Big|_{2{,}5}^{x}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Если $x>4$, то $f(x)=0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2{,}5}0dx+\frac{2}{3}\int\limits_{2{,}5}^{4}dx+\int\limits_{4}^{x}0dx=0+\frac{2}{3}x\ \Big|_{2{,}5}^{4}+0=\frac{2}{3}(4-2{,}5)=1$.

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<2{,}5\\ \dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{5}{2}\right), -2{,}5\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала: $P(3<x<3{,}3)=F(3{,}3)-F(3)=\frac{8}{15}-\frac{1}{3}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

Ответ: $\gamma=4$, $M(X)=3{,}25$, $D(X)=0{,}1875$, $F(x)=\begin{cases}0, x<2{,}5\\ \dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{5}{2}\right), -2{,}5\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$,

$P(3<x<3{,}3)=0{,}2$

22) Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x)=\gamma e^{-2x^2+8x-2}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $1<X<3$.

Решение: Функция плотности распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

Приведем данную функцию $f(x)$ к такому виду. Преобразуем показатель:

$$-2x^2+8x-2=-2\left(x^2-2\cdot 2x+4\right)-2+8=-2(x-2)^2+6=-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+6$$

Таким образом:

$$f(x)=\gamma e^{-2x^2+8x-2}=\gamma e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}+6}=\gamma e^6 e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Математическое ожидание: $M(X)=2$, дисперсия: $D(X)=\sigma^2=\dfrac{1}{4}$.

$$\gamma e^6=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\Rightarrow\gamma=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-6}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-6}$$

Функция распределения вероятностей:

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}dx.$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

Используем формулу:

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения данной функции найдём по соответствующей таблице.

Для данной задачи вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(1<X<3)=\Phi\left(\frac{3-2}{\frac{1}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\frac{1}{2}}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)+\Phi(2)=2\cdot\Phi(2)\approx$$

$$\approx 2\cdot 0{,}4772=0{,}9545$$

Ответ: $\gamma=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-6}$, $M(X)=2$, $D(X)=\dfrac{1}{4}$, $F(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}dx$, $P(1<X<3)\approx 0{,}9545$