Сборник готовых задач на различные виды распределений дискретной случайной величины

Дополнительный материал к теме «Дискретная случайная величина»:
http://mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html

Оглавление:

(кликабельно)

1. Произвольные, изначально известные дискретные распределения

Задача 1. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4, p_5 и дисперсию $D(X)$, если математическое ожидание $M(X) = 0{,}1$

Решение: случайная величина X может принимать только пять значений, соответствующие события образуют полную группу, поэтому:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$
$$0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + p_4 + p_5 = 1$$
$$p_4 + p_5 = 0{,}5$$

По определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$$
$$0{,}1 = -2 \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + p_4 + 2p_5$$
$$p_4 + 2p_5 = 0{,}6$$

Вероятности p_4 и p_5 найдем из решения системы:

$$\begin{cases} p_1 + p_5 = 0{,}5 \\ p_4 + 2p_5 = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow p_5 = 0{,}1$$

$$p_4 = 0{,}5 - p_5 = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$$

Для нахождения дисперсии заполним вспомогательную расчетную таблицу:

x_i	-2	-1	0	1	2	Суммы:
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	1
x_i^2	4	1	0	1	4	
$x_i^2 p_i$	0,8	0,1	0	0,4	0,4	1,7

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (0{,}1)^2 = 1{,}7 - 0{,}01 = 1{,}69$$

Ответ: $p_4 = 0{,}4$, $p_5 = 0{,}1$, $D(X) = 1{,}69$

Задача 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	-1	3	8	9
p_i	4p	0,2	0,3	p	0,4

Найти: а) p; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; в) интегральную функцию распределения $F(x)$ и начертить её график; г) $P(-5 < x < 2)$.

Решение:

а) Найдем неизвестное значение p.

Случайная величина X может принимать только 5 значений, поэтому:

$$4p + 0{,}2 + 0{,}3 + p + 0{,}4 = 1$$

$$0{,}9 + 5p = 1$$

$$5p = 0{,}1$$

$$p = 0{,}02$$

б) Найдём математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	-2	-1	3	8	9	Суммы:
p_i	0,08	0,2	0,3	0,02	0,4	1
$x_i p_i$	-0,16	-0,2	0,9	0,16	3,6	4,3
$x_i^2 p_i$	0,32	0,2	2,7	1,28	32,4	36,9

Математическое ожидание: $M(X) = 4{,}3$

Дисперсию вычислим по формуле:

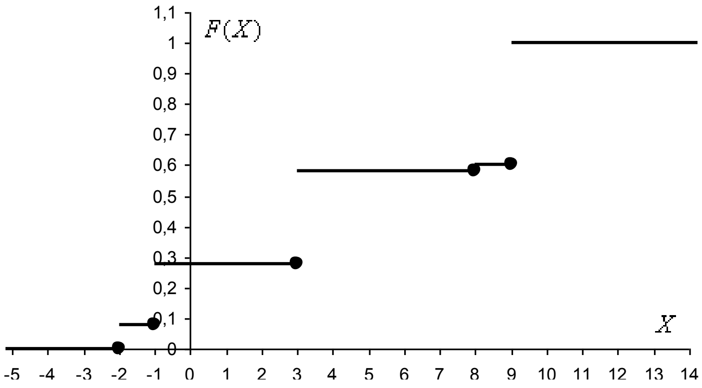
$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 36{,}9 - (4{,}3)^2 = 36{,}9 - 18{,}49 = 18{,}41.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{18{,}41} \approx 4{,}29$

в) Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le -2; \\ 0{,}08 \ \ \textit{при} \ \ -2 < x \le -1; \\ 0{,}28 \ \ \textit{при} \ \ -1 < x \le 3; \\ 0{,}58 \ \ \textit{при} \ \ 3 < x \le 8; \\ 0{,}6 \ \ \textit{при} \ \ 8 < x \le 9; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 9. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



г) Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала: $P(-5 < x < 2) = F(2) - F(-5) = 0{,}28 - 0 = 0{,}28$

Задача 3. Дискретная случайная величина (ДСВ) X задана законом распределения:

X	x_i	-4	-2	x
	p_i	0,3	0,5	p

Известно, что $M(X) = -1{,}8$. Найти: p, x, $D(X)$, $P(-3 \le X < x)$

Решение: дискретная случайная величина X может принимать только три значения, соответствующие события образуют полную группу, поэтому:

$$p_1 + p_2 + p = 1$$
$$0{,}3 + 0{,}5 + p = 1$$
$$p = 0{,}2$$

По определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + xp$$
$$-4 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}5 + 0{,}2x = -1{,}8$$
$$0{,}2x = 0{,}4$$
$$x = 2$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x^2 p - (M(X))^2 = (-4)^2 \cdot 0{,}3 + (-2)^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}2 - (-1{,}8)^2 =$$
$$= 4{,}8 + 2 + 0{,}8 - 3{,}24 = 4{,}36$$

Вычислим $P(-3 \le X < x) = P(-3 \le X < 2)$. Сначала составим функцию распределения вероятностей:

$$F(X) = \begin{cases} 0; x \le -4 \\ 0{,}3; -4 < x \le -2 \\ 0{,}8; -2 < x \le 2 \\ 1; x > 2 \end{cases}$$

$P(-3 \le X < 2) = F(2) - F(-3) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $p = 0{,}2$, $x = 2$, $D(X) = 4{,}36$, $P(-3 \le X < 2) = 0{,}5$

Задача 4. Дискретная случайная величина X имеет распределение вероятностей, заданное таблицей:

x_i	10	12	15	17	21
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	a

Требуется:
1) найти число a;
2) построить многоугольник распределения;
3) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;
4) вычислить вероятность попадания случайной величины X на промежутки $[-1;10)$, $[11;15]$, $[12;21)$;
5) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

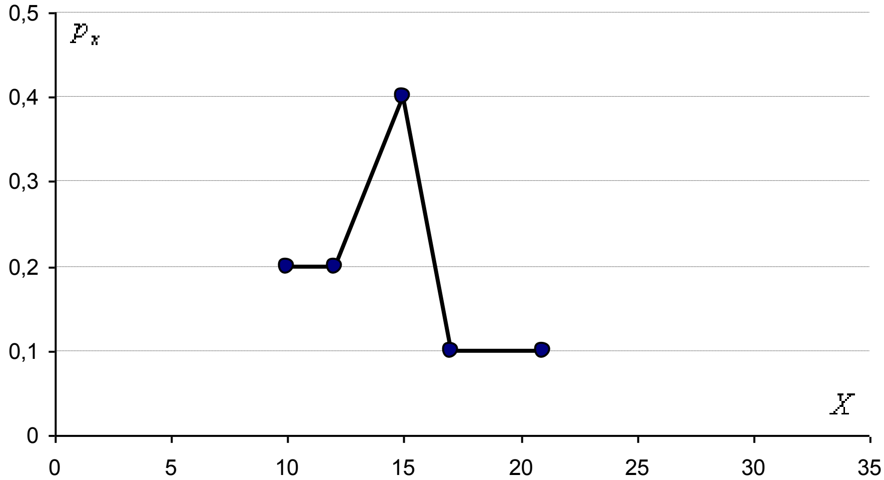
Решение:
1) Найдем неизвестное значение вероятности a.
Случайная величина X может принимать только 5 значений, поэтому:

$$0{,}2+0{,}2+0{,}4+0{,}1+a=1$$

$$0{,}9+a=1$$

$$a=0{,}1$$

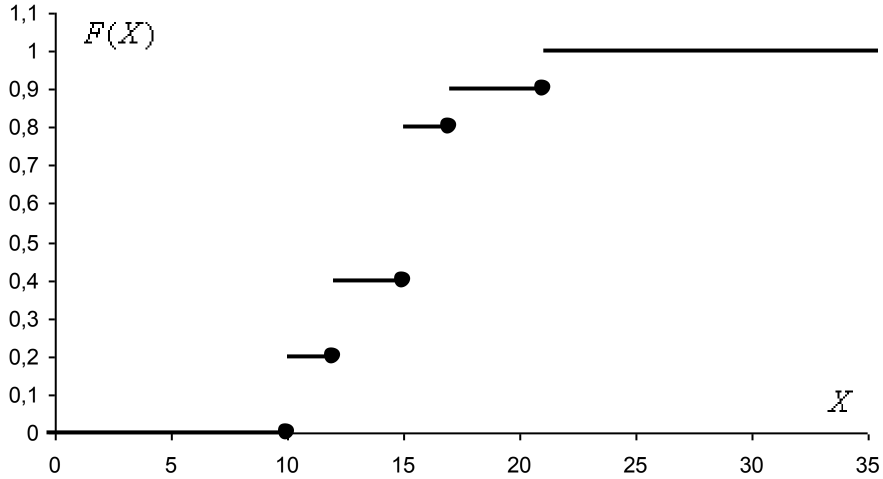
2) Построим многоугольник распределения:



3) Найдем функцию распределения и построим ее график:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ x\le 10; \\ 0{,}2 \ \ \text{при} \ 10<x\le 12; \\ 0{,}4 \ \ \text{при} \ 12<x\le 15; \\ 0{,}8 \ \ \text{при} \ 15<x\le 17; \\ 0{,}9 \ \ \text{при} \ 17<x\le 21; \\ 1 \ \ \text{при} \ x>21. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



4) Вычислим вероятность попадания случайной величины X на промежутки:

$$P(-1 \le X < 10) = F(10) - F(-1) = 0 - 0 = 0$$
$$P(11 \le X \le 15) = P(11 \le X < 15) + P(15) = F(15) - F(11) + p_3 = 0,4 - 0,2 + 0,4 = 0,6$$
$$P(12 \le X < 21) = F(21) - F(12) = 0,9 - 0,2 = 0,7$$

5) Найдём математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Заполним расчетную таблицу:

x_i	10	12	15	17	21	Суммы:
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	1
$x_i p_i$	2	2,4	6	1,7	2,1	14,2
$x_i^2 p_i$	20	28,8	90	28,9	44,1	211,8

Математическое ожидание: $M(X) = 14,2$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 211,8 - (14,2)^2 = 211,8 - 201,64 = 10,16$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{10,16} \approx 3,19$

Задача 5. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, если:

x_i	2	12	32	47	60
p_i	0,1	0,1	0,5	0,2	?

Найти $F(x)$ и построить её график.

Решение: Найдем неизвестное значение вероятности.
Случайная величина X может принимать только 5 значений, поэтому:

$$0{,}1+0{,}1+0{,}5+0{,}2+p_5=1$$

$$0{,}9+p_5=1$$

$$p_5=0{,}1$$

Заполним расчетную таблицу:

x_i	2	12	32	47	60	Суммы:
p_i	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1	1
$x_i p_i$	0,2	1,2	16	9,4	6	32,8
$x_i^2 p_i$	0,4	14,4	512	441,8	360	1328,6

Математическое ожидание: $M(X)=32{,}8$

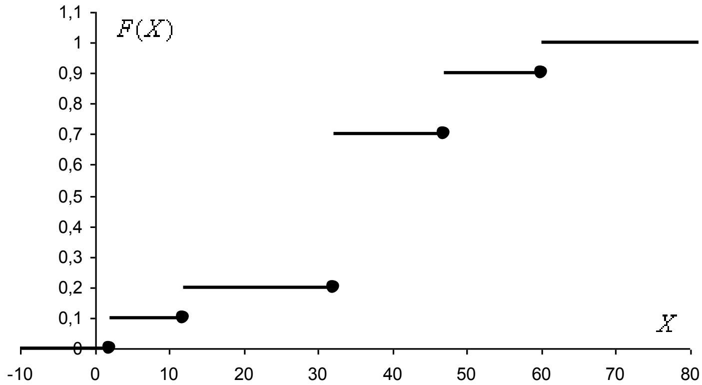
Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=1328{,}6-(32{,}8)^2=1328{,}6-1075{,}84=252{,}76$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{252{,}76}\approx 15{,}90$

Составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le 2; \\ 0{,}1 \;\; при \;\; 2<x\le 12; \\ 0{,}2 \;\; при \;\; 12<x\le 32; \\ 0{,}7 \;\; при \;\; 32<x\le 47; \\ 0{,}9 \;\; при \;\; 47<x\le 60; \\ 1 \;\; при \;\; x>60. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



2. Распределения, полученные с помощью прямого применения теорем

Задача 6. Рабочий обслуживает 3 станка, вероятности выхода из строя каждого из которых в течение часа соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Составить закон распределения числа станков, не требующих ремонта в течение часа. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины

Решение: по условию $q_1 = 0{,}2$, $q_2 = 0{,}15$, $q_3 = 0{,}1$ – вероятности выхода из строя соответствующих станков в течение часа. Тогда вероятности их безотказной работы:

$p_1 = 1 - q_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$p_2 = 1 - q_2 = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$p_3 = 1 - q_3 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Используя теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий, составим закон распределения случайной величины X – числа станков, не требующих ремонта в течение часа:

0) $x = 0$ (все станки вышли из строя)

$p(0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}003$

1) $x = 1$ (два станка вышли из строя)

$p(1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}1 +$
$0{,}2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}012 + 0{,}017 + 0{,}027 = 0{,}056$

2) $x = 2$ (один станок вышел из строя)

$p(2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}9 +$
$0{,}8 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}068 + 0{,}153 + 0{,}108 = 0{,}329$

3) $x = 3$ (все станки проработали безотказно)

$p(3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}9 = 0{,}612$

Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
$p(i)$	0,003	0,056	0,329	0,612	1
$x_i p(i)$	0	0,056	0,658	1,836	2,55
$x_i^2 p(i)$	0	0,056	1,316	5,508	6,88

Искомый закон распределения случайной величины X сведен в две верхние строки таблицы.

Математическое ожидание: $M(X) = \sum x_i p(i) = 2{,}55$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = \sum x_i^2 p(i) - (2{,}55)^2 = 6{,}88 - 6{,}5025 = 0{,}3775$$

Ответ:

x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,003	0,056	0,329	0,612

$M(X) = 2{,}55$, $D(X) = 0{,}3775$

В Задачах № 7-9 требуется: найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Задача 7. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. Случайная величина X – число СУ, перевыполнивших план.

Решение: По условию $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$ – вероятности перевыполнения плана для соответствующих СУ.

Тогда вероятности того, что план не будет перевыполнен:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – количества СУ, перевыполнивших план:

0) $x = 0$ (все СУ не перевыполнили план)

$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$

1) $x = 1$

$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092$

2) $x = 2$

$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398$

3) $x = 3$ (все СУ перевыполнили план)

$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$

Таким образом, искомый закон распределения:

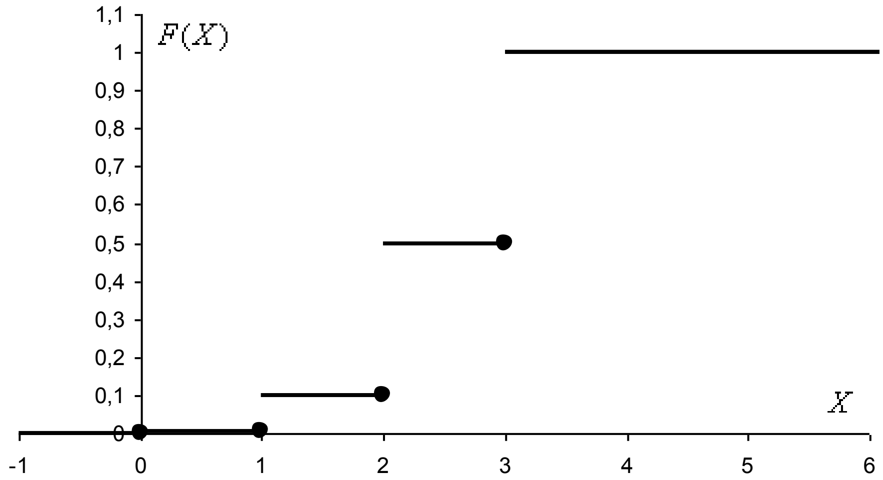
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверка: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le 0; \\ 0{,}006 \ \text{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}098 \ \text{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}496 \ \text{при} \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \text{при} \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504	1
$x_i p(i)$	0	0,092	0,796	1,512	2,4
$x_i^2 p(i)$	0	0,092	1,592	4,536	6,22

Математическое ожидание: $M(X) = 2{,}4$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6{,}22 - (2{,}4)^2 = 6{,}22 - 5{,}76 = 0{,}46$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68$

Задача 8. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

Решение: по условию $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}8$ – вероятности безотказной работы в течение гарантийного срока телевизоров соответствующих типов. Тогда вероятности их отказа:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – количества телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов:

0) $x = 0$ (все телевизоры вышли из строя)
$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}006$

1) $x = 1$
$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}054 + 0{,}014 + 0{,}024 = 0{,}092$

2) $x = 2$
$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}398$

3) $x = 3$ (все телевизоры проработали гарантийный срок)
$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}504$

Таким образом, искомый закон распределения:

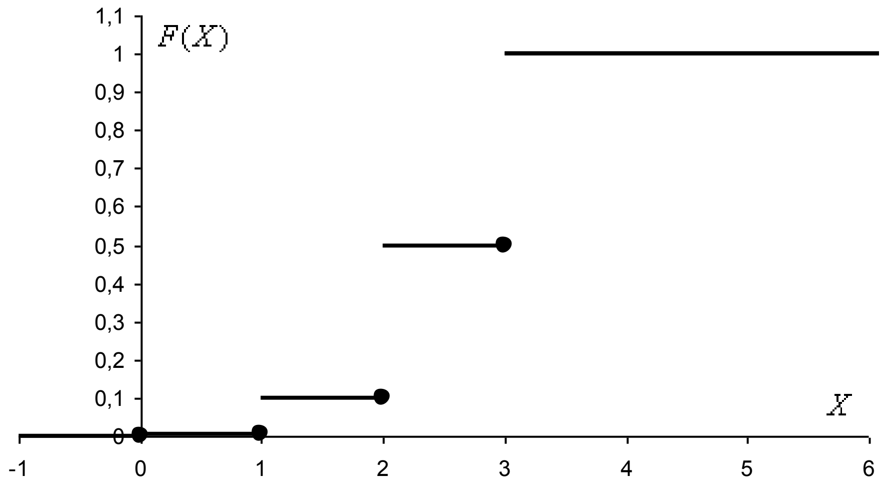
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверка: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ 0{,}006 \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}098 \ \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}496 \ \ \textit{при} \ \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504	1
$x_i p(i)$	0	0,092	0,796	1,512	2,4
$x_i^2 p(i)$	0	0,092	1,592	4,536	6,22

Математическое ожидание: $M(X) = 2,4$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6,22 - (2,4)^2 = 6,22 - 5,76 = 0,46$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,46} \approx 0,68$

Задача 9. Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6. Случайная величина X – число поражений мишени.

Решение: По условию $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,6$ – вероятности попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,4 = 0,6$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,5 = 0,5$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,6 = 0,4$

Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – числа поражений мишени.

0) $x = 0$ (все промахнулись)
$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,12$

1) $x = 1$
$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 =$
$= 0,08 + 0,12 + 0,18 = 0,38$

2) $x = 2$
$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 =$
$= 0,08 + 0,12 + 0,18 = 0,38$

3) $x = 3$
$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,12$

Таким образом, искомый закон распределения:

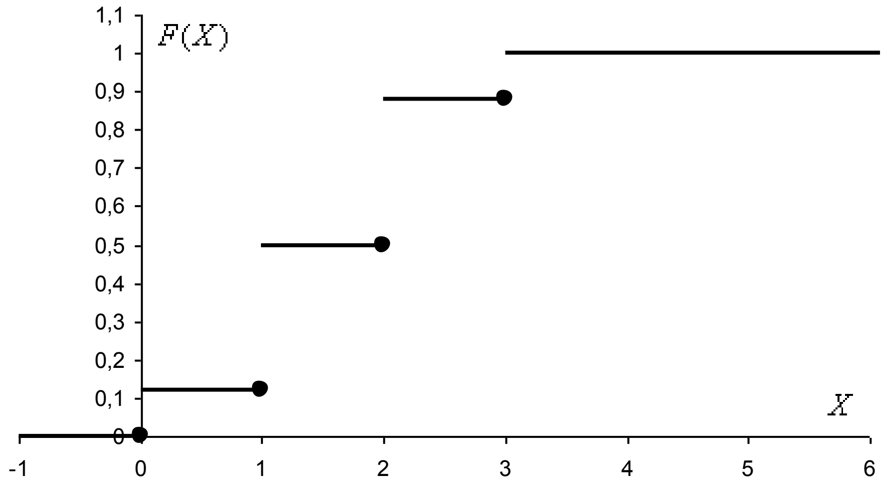
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,12	0,38	0,38	0,12

Проверка: 0,12 + 0,38 + 0,38 + 0,12 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0;\\ 0{,}12 \ \textit{при} \ 0<x\le 1;\\ 0{,}5 \ \textit{при} \ 1<x\le 2;\\ 0{,}88 \ \textit{при} \ 2<x\le 3;\\ 1 \ \textit{при} \ x>3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
$p(i)$	0,12	0,38	0,38	0,12	1
$x_i p(i)$	0	0,38	0,76	0,36	1,5
$x_i^2 p(i)$	0	0,38	1,52	1,08	2,98

Математическое ожидание: $M(X)=1{,}5$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=2{,}98-(1{,}5)^2=2{,}98-2{,}25=0{,}73$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}73}\approx 0{,}85$

Задача 10. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. Построить ряд распределения X и найти $M(X)$, где X – общее число попаданий.

Решение: по условию $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}6$ – вероятности попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промахов:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Составим ряд распределения случайной величины X – общего число попаданий.

Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим ряд распределения случайной величины X:

0) $x = 0$

$p_{x=0} = q_1 q_1 q_2 q_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

1) $x = 1$

$p_{x=1} = p_1 q_1 q_2 q_2 + q_1 p_1 q_2 q_2 + q_1 q_1 p_2 q_2 + q_1 q_1 q_2 p_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 +$
$+ 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}2$

2) $x = 2$

$p_{x=2} = p_1 p_1 q_2 q_2 + p_1 q_1 p_2 q_2 + p_1 q_1 q_2 p_2 + q_1 p_1 p_2 q_2 + q_1 p_1 q_2 p_2 + q_1 q_1 p_2 p_2 =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 +$
$+ 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}37$

3) $x = 3$

$p_{x=3} = p_1 p_1 p_2 q_2 + p_1 p_1 q_2 p_2 + p_1 q_1 p_2 p_2 + q_1 p_1 p_2 p_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 +$
$+ 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}3$

4) $x = 4$

$p_{x=0} = p_1 p_1 p_2 p_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}09$

Таким образом, искомый ряд распределения:

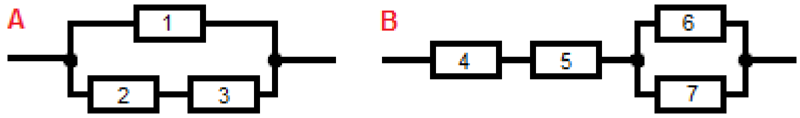
x_i	0	1	2	3	4
$p_{x=i}$	0,04	0,2	0,37	0,3	0,09

Проверка: 0,04 + 0,2 + 0,37 + 0,3 + 0,09 = 1

Вычислим математическое ожидание:

$M(X) = \sum x_i p_{x=i} = 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}37 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}09 =$
$= 0 + 0{,}2 + 0{,}74 + 0{,}9 + 0{,}36 = 2{,}2$

Задача 11. Электроприбор содержит два независимо работающих блока A и B, каждый из которых состоит из нескольких элементов:



Известны вероятности отказа каждого из элементов:
$p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}1$, $p_5 = 0{,}2$, $p_6 = 0{,}2$, $p_7 = 0{,}3$

При отказе блока он подлежит полной замене, причем стоимость замены блока A составляет $C_1 = 5$, блока B – $C_2 = 8$ единиц стоимости. Предполагается, что за период времени T замененный блок не выйдет ещё раз из строя.

Составить закон распределения случайной величины η – стоимости восстановления прибора за период времени T. Найти среднюю стоимость восстановления прибора, дисперсию и стандартное отклонение. Построить полигон и функцию распределения.

Решение: сначала найдем вероятности безотказной работы соответствующих элементов. По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$
$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$
$$q_5 = 1 - p_5 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
$$q_6 = 1 - p_6 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$
$$q_7 = 1 - p_7 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Найдем вероятность $P(A)$ выхода из строя блока A. Данный блок выйдет из строя в том случае, если откажет элемент № 1 и хотя бы один из элементов № 2, 3. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:

$$P(A) = p_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 + p_1p_2q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}006 + 0{,}024 + 0{,}054 = 0{,}084$$

Вероятность безотказной работы блока:
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}084 = 0{,}916$$

Найдём вероятность $P(\overline{B})$ безотказной работы 2-го блока. Блок будет безотказно работать, если исправны оба элемента № 4, 5 и хотя бы один из элементов № 6, 7. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:

$$P(\overline{B}) = q_4q_5q_6q_7 + q_4q_5p_6q_7 + q_4q_5q_6p_7 =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}4032 + 0{,}1008 + 0{,}1728 = 0{,}6768$$

Вероятность отказа блока:
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6768 = 0{,}3232$$

Составим закон распределения случайной величины η – стоимости восстановления прибора за период времени T.

Случайная величина η может принимать только 4 значения:

$x_1 = 0$ – оба блока не отказали.

$x_2 = 5$ – отказал блок A, но не отказал блок B

$x_3 = 8$ – отказал блок B, но не отказал блок A

$x_4 = 13$ – отказали оба блока.

Далее через p_1, p_2, p_3, p_4 будем обозначать вероятности соответствующих значений x_i.

По теоремам умножения вероятностей независимых событий:

$p_1 = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}916 \cdot 0{,}6768 \approx 0{,}6199$

$p_2 = P(A)P(\overline{B}) = 0{,}084 \cdot 0{,}6768 \approx 0{,}0569$

$p_3 = P(\overline{A})P(B) = 0{,}916 \cdot 0{,}3232 \approx 0{,}2961$

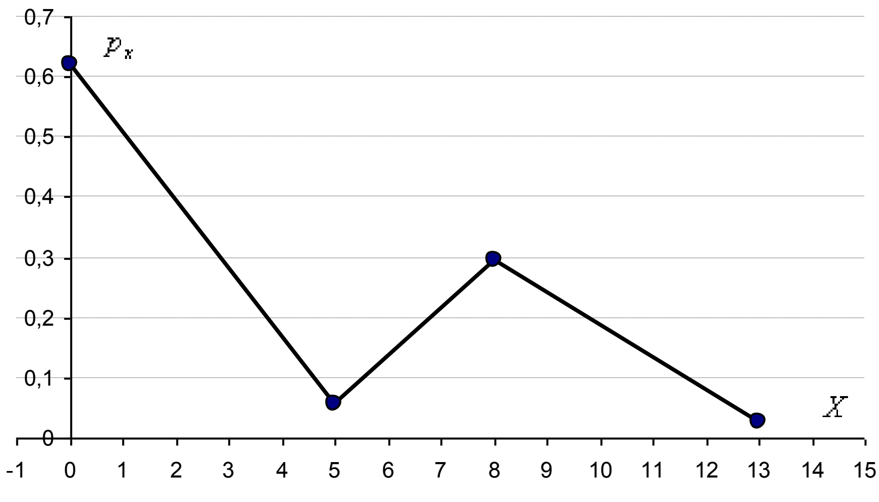
$p_4 = P(A)P(B) = 0{,}084 \cdot 0{,}3232 \approx 0{,}0271$

Таким образом, искомый закон распределения:

x_i	0	5	8	13
p_i	0,6199	0,0569	0,2961	0,0271

Проверка: 0,6199 + 0,0569 + 0,2961 + 0,0271 = 1

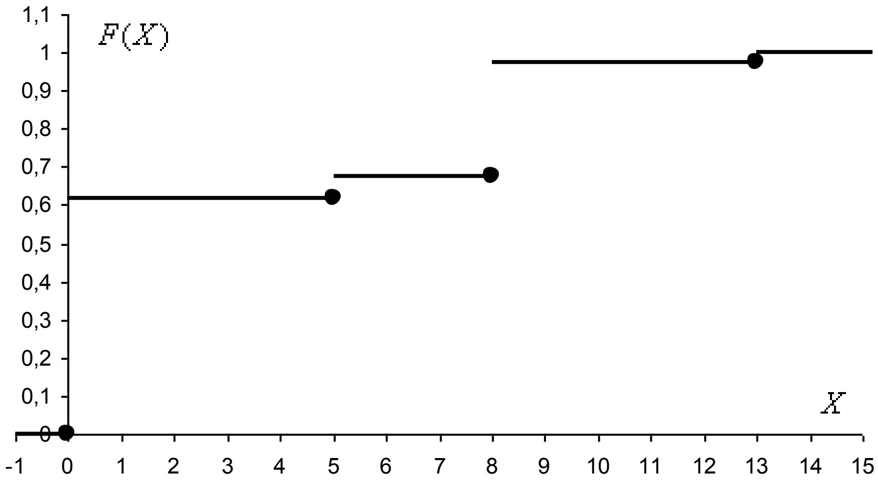
Постоим полигон распределения:



Составим функцию распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ 0{,}6199 \ \ при \ \ 0 < x \le 5; \\ 0{,}6768 \ \ при \ \ 5 < x \le 8; \\ 0{,}9729 \ \ при \ \ 8 < x \le 13; \\ 1 \ \ при \ \ x > 13 \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Найдём математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	5	8	13	Суммы:
p_i	0,6199	0,0569	0,2961	0,0271	1
$x_i p_i$	0	0,2843	2,3684	0,3529	3,0056
$x_i^2 p_i$	0	1,4213	18,9473	4,5881	24,9567

Математическое ожидание: $M(X) = 3{,}0056 \approx 3$ ден. ед. (средняя стоимость восстановления прибора)

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 24{,}9567 - (3{,}0056)^2 = 24{,}9567 - 9{,}0336 = 15{,}9231$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}9231} \approx 4$ ден. ед.

Задача 12. Бросают игральный кубик. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y(x) = \sin\left[\frac{\pi(x-3)}{6}\right]$, где x – число выпавших очков.

Решение: Составим ряд распределения случайной величины X

1) $x = 1$

$$y_1 = \sin\left[-\frac{\pi}{3}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $x = 2$

$$y_2 = \sin\left[-\frac{\pi}{6}\right] = -\frac{1}{2}$$

3) $x=3$
$y_3=\sin 0=0$

4) $x=4$
$y_4=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

5) $x=5$
$y_5=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $x=6$
$y_6=\sin\frac{\pi}{2}=1$

Поскольку выпадение любой грани кубика равновероятно, то вероятность появления каждого значения: $p=\frac{1}{6}$.

Построенный ряд распределения сведем в таблицу:

y_i	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(Y)=\sum y_i p_i=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

Вычислим дисперсию:

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=\sum y_i^2 p_i-(M(Y))^2=$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{17}{6}=\frac{17}{36}$$

Ответ: $M(Y)=\frac{1}{6}$, $D(Y)=\frac{17}{36}$

3. Распределения, близкие к геометрическому

Задача 13. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества изготовляемых изделий отдел технического контроля берет из партии не более 4 изделий. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. Составить закон распределения числа изделий, проверяемых из каждой партии. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение: составим закон распределения случайной величины X – количества проверенных изделий. По условию:

$q = 0{,}1$ – вероятность того, что изделие будет нестандартным. Тогда:

$p = 1 - q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ – вероятность того, что изделие будет стандартным:

Найдем закон распределения случайной величины X:

1) $x = 1$

$p_1 = q = 0{,}1$

2) $x = 2$

$p_2 = pq = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$

3) $x = 3$

$p_3 = ppq = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}081$

4) $x = 4$. Соответствующее событие состоит в двух несовместных исходах: четвертое проверяемое изделие будет либо стандартным, либо нет. Проверка в любом случае прекращается.

$p_4 = pppq + pppp = (0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 + (0{,}9)^4 = (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1 + 0{,}9) = (0{,}9)^3 = 0{,}729$

Заполним расчетную таблицу. Искомый закон распределения случайной величины X сведен в верхние две строки таблицы:

X	x_i	1	2	3	4	$\sum$
	p_i	0,1	0,09	0,081	0,729	1
$x_i p_i$		0,1	0,18	0,243	2,916	3,439
$x_i^2 p_i$		0,1	0,36	0,729	11,664	12,853

Вычислим математическое ожидание:

$M(X) = \sum x_i p_i = 3{,}439$

Вычислим дисперсию:

$D(X) = \sum x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 12{,}853 - 3{,}439^2 = 12{,}853 - 11{,}82672 \approx 1{,}02628$

Вычислим среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx \sqrt{1{,}026279} \approx 1{,}01$

Задача 14. Испытывается надежность партии из 5 приборов. Для каждого прибора вероятность выдержать испытание равна 0,75. Проверка заканчивается при первом отказе.

Для случайной величины X – числа проверенных приборов, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: по условию:
$p = 0{,}75$ – вероятность того, что прибор выдержит испытание, тогда:
$q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ вероятность того, что прибор не выдержит испытание.

Найдем закон распределения случайной величины X:

1) $x = 1$
$p_1 = q = 0{,}25$

2) $x = 2$
$p_2 = pq = 075 \cdot 0{,}25 = 0{,}1875$

3) $x = 3$
$p_3 = ppq = 075 \cdot 075 \cdot 0{,}25 = 0{,}140625$

4) $x = 4$
$p_4 = pppq = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}10546875$

5) $x = 5$ Соответствующее событие состоит в двух несовместных исходах: пятый проверяемый прибор либо выдержит испытание, либо нет. Проверка в любом случае прекращается.

$$p_5 = ppppq + ppppp = (0{,}75)^4 \cdot 0{,}25 + (0{,}75)^5 = (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25 + 0{,}75) = (0{,}75)^4 = 0{,}31640625$$

Заполним расчетную таблицу. Искомый закон распределения случайной величины X сведен в верхние две строки таблицы:

X	x_i	1	2	3	4	5	$\sum$
	p_i	0,25	0,1875	0,140625	0,10546875	0,31640625	1
$x_i p_i$		0,25	0,375	0,421875	0,421875	1,58203125	3,05078125
$x_i^2 p_i$		0,25	0,75	1,265625	1,6875	7,91015625	11,86328125

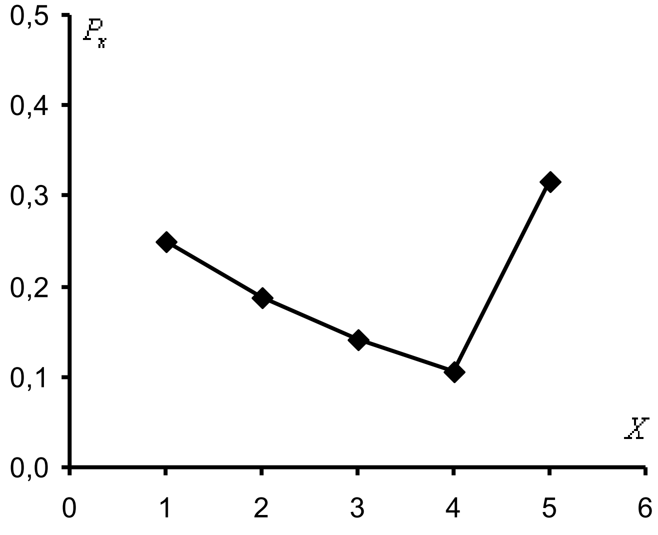
Математическое ожидание:
$$M(X) = \sum x_i p_i = 3{,}05078125 \approx 3{,}05$$

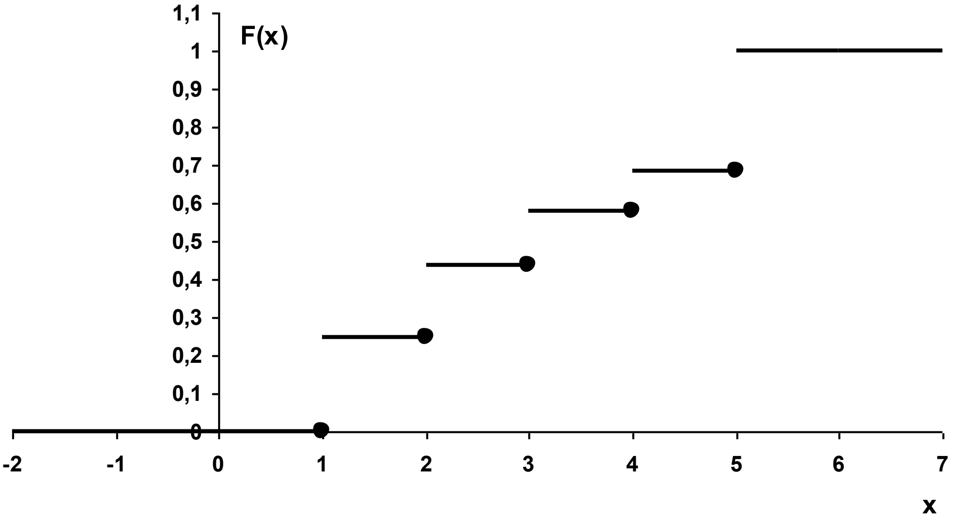
Вычислим дисперсию:
$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 11{,}86328125 - 9{,}307266235 = 2{,}556015015 \approx 2{,}556$$

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 1; \\ 0{,}25 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}4375 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}578125 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}68359375 \ \textit{при} \ 4 < x \le 5; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 5. \end{cases}$$

Изобразим полигон распределения и функцию распределения:





Задача 15. Стрелок, получив пять патронов, стреляет по мишени, причем каждый выстрел стоит ему 1 р. При первом попадании он получает приз, равный $\frac{120}{m}$, где m – число попыток, нужны для попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5

Для случайной величины X – дохода, полученного стрелком, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: случайная величина X имеет геометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X:

$p = 0{,}5$ – вероятность попадания стрелка при каждом выстреле;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность промаха при каждом выстреле;

Найдем закон распределения случайной величины X:

– стрелок промахнулся все пять раз

Доход стрелка: $x = -5$ рублей (приза нет, затраты на патроны);

Соответствующая вероятность:

$p_{x=-5} = qqqqq = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$

– стрелок попал с пятой попытки

Доход стрелка: $x = \frac{120}{5} - 5 = 19$ рублей

$p_{x=19} = qqqqp = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$

– стрелок попал с четвертой попытки

Доход стрелка: $x = \frac{120}{4} - 4 = 26$ рублей

$p_{x=26} = qqqp = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$

– стрелок попал с третьей попытки

Доход стрелка: $x = \frac{120}{3} - 3 = 37$ рублей

$p_{x=37} = qqp = (0{,}5)^3 = 0{,}125$

– стрелок попал со второй попытки

Доход стрелка: $x = \frac{120}{2} - 2 = 58$ рублей

$p_{x=58} = qp = (0{,}5)^2 = 0{,}25$

– стрелок попал с первой попытки

Доход стрелка: $x = \frac{120}{1} - 1 = 119$ рублей

$p_{x=119} = p = 0{,}5$

Заполним расчетную таблицу. Искомый закон распределения случайной величины X сведен в верхние две строки таблицы:

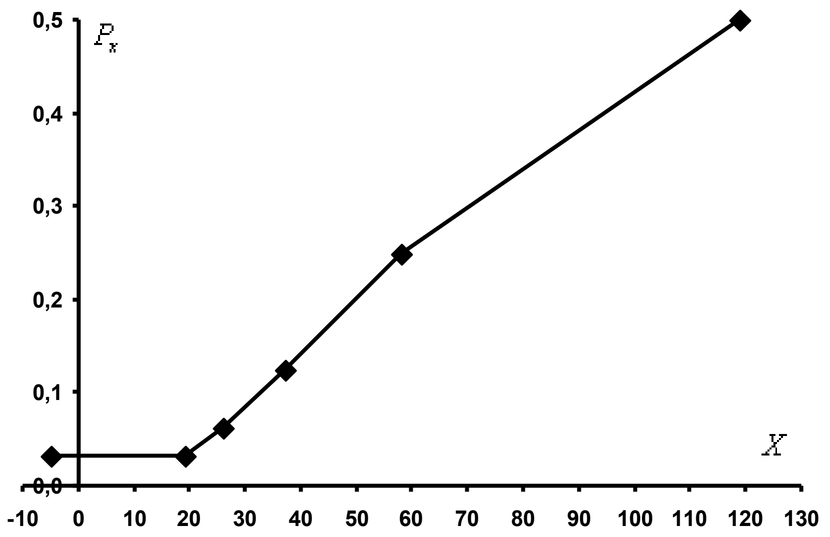
X	x_i	-5	19	26	37	58	119	
	$p(x_i)$	0,03125	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	$\sum = 1$
	$x_i p(x_i)$	-0,15625	0,59375	1,625	4,625	14,5	59,5	$\sum = 80{,}6875$
	$x_i^2 p(x_i)$	0,78125	11,28125	42,25	171,125	841	7080,5	$\sum = 8146{,}9375$

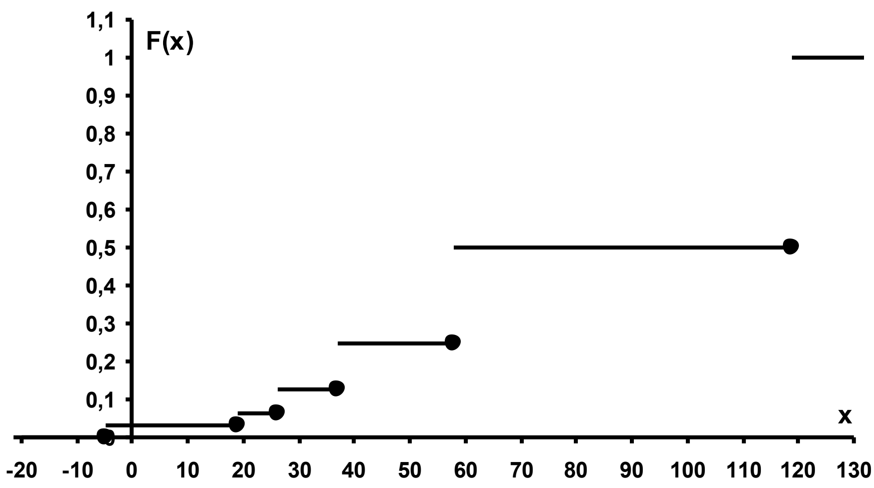
Математическое ожидание:
$$M(X)=\sum x_i p(x_i)=80{,}6875$$

Дисперсия:
$$D(X)=\sum x_i^2 p(x_i)-\left(M(X)\right)^2=8146{,}9375-(80{,}6875)^2=8146{,}9375-6510{,}472656=$$
$$=1636{,}464844\approx 1636{,}5$$

Составим функцию распределения:
$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le -5;\\ 0{,}03125 \ \textit{при} \ -5<x\le 19;\\ 0{,}0625 \ \textit{при} \ 19<x\le 26;\\ 0{,}125 \ \textit{при} \ 26<x\le 37;\\ 0{,}25 \ \textit{при} \ 37<x\le 58;\\ 0{,}5 \ \textit{при} \ 58<x\le 119;\\ 1 \ \textit{при} \ x>119.\end{cases}$$

Изобразим полигон распределения и функцию распределения.





Задача 16. На пути движения автомобиля установлено 6 светофоров. Зеленый свет горит 30 секунд, желтый – 3 сек., красный – 20 сек., желтый – 3 сек.

Для случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(X)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: Случайная величина X имеет геометрическое распределение. По правилам дорожного движения автомобиль обязан остановиться на красный свет, а также на желтый (после зеленого для пешеходов).

Период переключения светофоров: 30+3+20+3=56 сек.

Таким образом:

$q = \frac{23}{56}$ – вероятность остановки автомобиля на каждом светофоре;

$p = \frac{33}{56}$ – вероятность проезда автомобиля на каждом светофоре.

Найдем закон распределения случайной величины X:

0) $x = 0$ (остановка на первом же светофоре)

$$p_0 = q = \frac{23}{56} \approx 0{,}4107$$

1) $x = 1$

$$p_1 = pq = \frac{33}{56} \cdot \frac{23}{56} \approx 0{,}2420$$

2) $x = 2$

$$p_2 = ppq = \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{23}{56} \approx 0{,}1426$$

3) $x = 3$

$$p_3 = pppq = \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{23}{56} \approx 0{,}0840$$

4) $x = 4$

$$p_4 = ppppq = \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{23}{56} \approx 0{,}0495$$

5) $x = 5$

$$p_5 = pppppq = \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{23}{56} \approx 0{,}0292$$

6) $x = 6$

$$p_6 = pppppp = \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \cdot \frac{33}{56} \approx 0{,}0419$$

Заполним расчетную таблицу. Искомый закон распределения случайной величины X сведен в верхние две строки таблицы:

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	$\sum$
	p_i	0,4107	0,2420	0,1426	0,0840	0,0495	0,0292	0,0419	1
$x_i p_i$		0	0,2420	0,2852	0,2521	0,1981	0,1459	0,2513	1,3747
$x_i^2 p_i$		0	0,2420	0,5705	0,7564	0,7924	0,7296	1,5075	4,5985

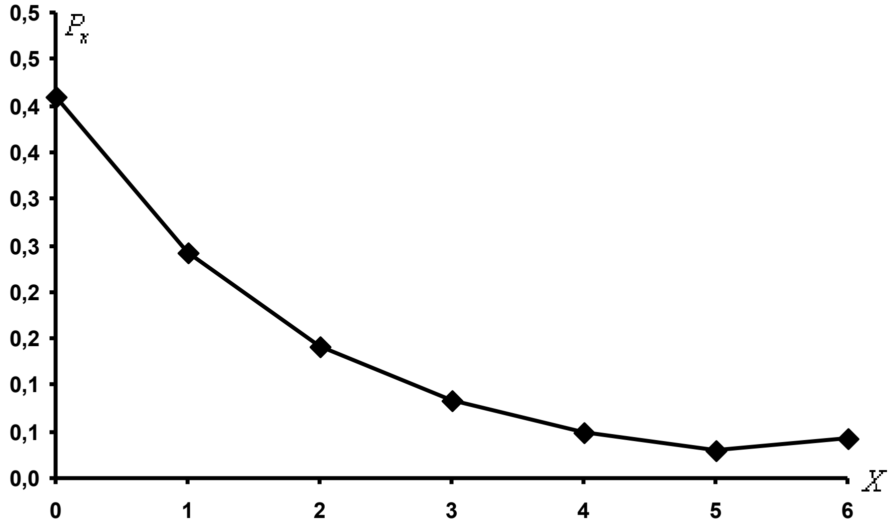
Математическое ожидание:
$M(X) = \sum x_i p_i = 1{,}3747$

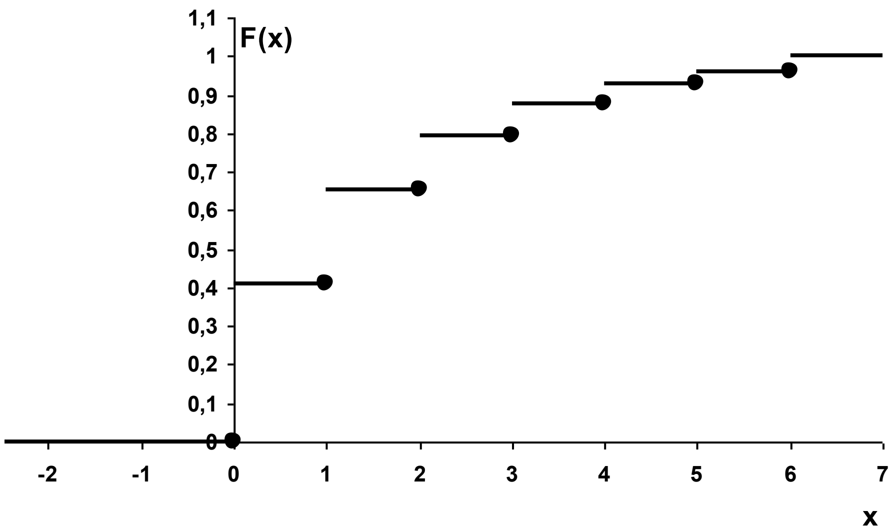
Дисперсия:
$D(X) = \sum x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 4{,}5985 - 1{,}8898 = 2{,}7087$

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}4107 \ \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}6527 \ \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}7954 \ \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}8794 \ \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}9289 \ \ \textit{при} \ 4 < x \le 5; \\ 0{,}9581 \ \ \textit{при} \ 5 < x \le 6; \\ 1 \ \ \textit{при} \ x > 6. \end{cases}$$

Изобразим полигон распределения и функцию распределения:





4. Биномиальное распределение вероятностей

В Задачах № 17-23 требуется: найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Задача 17. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. Случайная величина X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 3$ – всего приборов в контрольной партии;

$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное количество приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

P_n^x – вероятность того, что из n приборов ровно x будут удовлетворять требованиям качества.

По условию:

$p = 0{,}9$ – вероятность того, что прибор удовлетворяет требованиям качества.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ – вероятность того, что прибор не удовлетворяет требованиям качества.

0) $x = 0$

$$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^3 = (0{,}1)^3 = 0{,}001$$

1) $x = 1$

$$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}027$$

2) $x = 2$

$$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$$

3) $x = 3$

$$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^0 = (0{,}9)^3 = 0{,}729$$

Таким образом, искомый закон распределения:

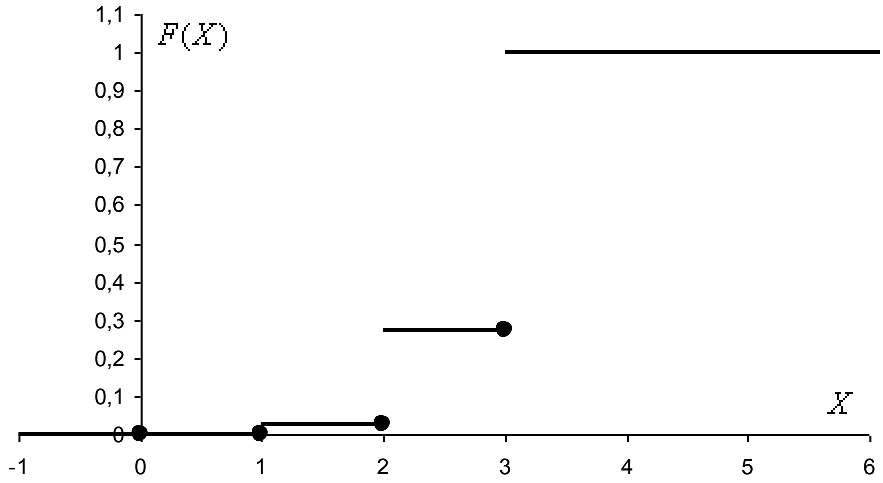
x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Проверка: 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}001 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}028 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}271 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7$

Найдем дисперсию: $D(X) = npq = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}27$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52$

Задача 18. Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3. Случайная величина X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$

В данной задаче:

$n = 3$ – всего блоков;

$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное количество блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

P_n^x – вероятность того, что из n блоков из строя выйдет ровно x блоков в течение гарантийного срока.

По условию:
$p = 0{,}3$ – вероятность выхода из строя каждого блока.
$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность безотказной работы каждого из блоков.

0) $x = 0$
$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0{,}3)^0 \cdot (0{,}7)^3 = (0{,}7)^3 = 0{,}343$

1) $x = 1$
$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0{,}3)^1 \cdot (0{,}7)^2 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}441$

2) $x = 2$
$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^1 = 3 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$

3) $x = 3$
$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^0 = (0{,}3)^3 = 0{,}027$

Таким образом, искомый закон распределения:

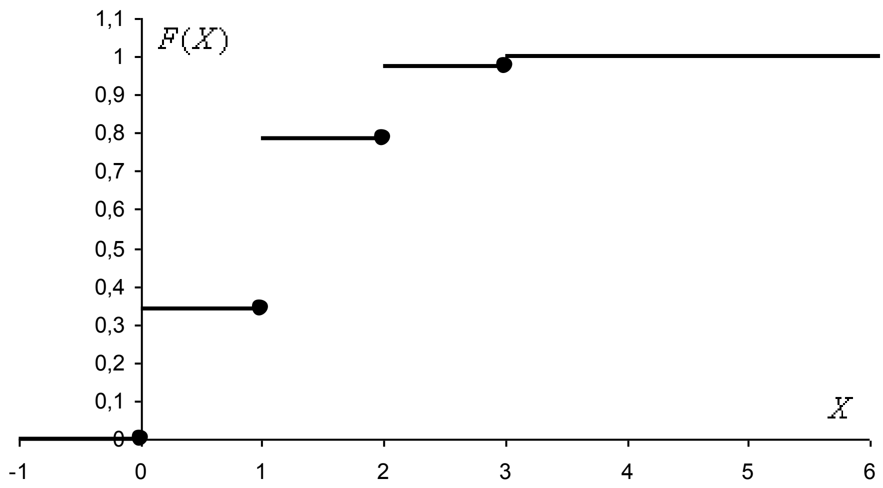
x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Проверка: 0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}343 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}784 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}973 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$

Найдем дисперсию: $D(X) = npq = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}63$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}63} \approx 0{,}79$

Задача 19. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Случайная величина X – число попаданий в цель при трех выстрелах.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:
$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$

В данной задаче:
$n = 3$ – всего выстрелов;
$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное число попаданий в цель.
$p = 0{,}8$ – вероятность попадания в цель при каждом выстреле.
$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что цель не будет поражена при каждом выстреле.
P_3^x – вероятность того, что после 3 выстрелов цель будет поражена ровно x раз.

0) $x = 0$
$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = (0{,}2)^3 = 0{,}008$

1) $x = 1$
$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}096$

2) $x = 2$
$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$

3) $x = 3$
$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = (0{,}8)^3 = 0{,}512$

Таким образом, искомый закон распределения:

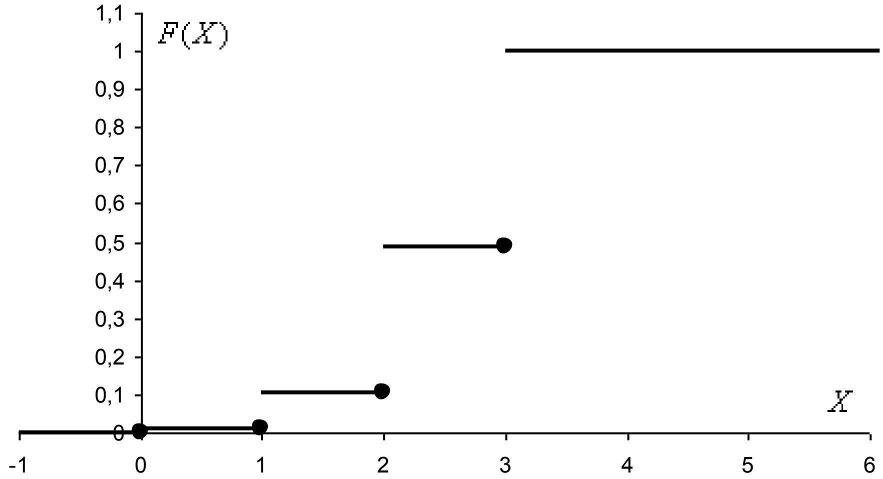
x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Проверка: 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ x \le 0; \\ 0{,}008 \ \ при \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}104 \ \ при \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}488 \ \ при \ \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \ при \ \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$

Найдем дисперсию: $D(X) = npq = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}48$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}48} \approx 0{,}6928$

Задача 20. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин подает красный и зеленый сигналы. Случайная величина X – число остановок на этой улице.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, а данной задаче:

$n = 4$ – всего светофоров;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество остановок автомобиля на красный свет.

P_n^x – вероятность того, что будет ровно x остановок из n.

Из условия следует:

$p = 0{,}5$ – вероятность остановки автомобиля на красный свет.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность проезда автомобиля на зеленый свет

0) $x = 0$
$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^4 = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$

1) $x = 1$
$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^3 = 4 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5)^3 = 0{,}25$

2) $x = 2$
$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^2 = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$

3) $x = 3$
$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^1 = 4 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

4) $x = 4$
$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^0 = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$

Таким образом, искомый закон распределения:

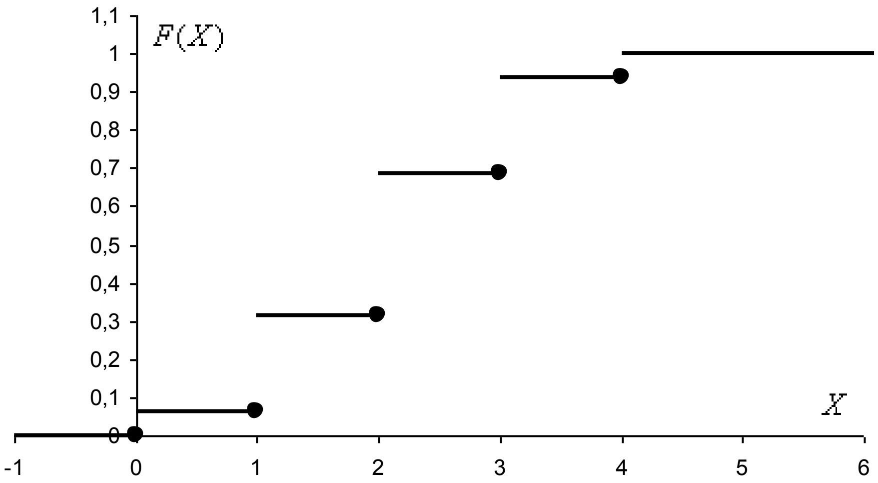
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Проверка: 0,0625 + 0,25 + 0,375 + 0,25 + 0,0625 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \text{\textit{при}} \ x \le 0; \\ 0{,}0625 \ \text{\textit{при}} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}3125 \ \text{\textit{при}} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}6875 \ \text{\textit{при}} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}9375 \ \text{\textit{при}} \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \text{\textit{при}} \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Используя соответствующие формулы, вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}5 = 2$$

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1$$

Задача 21. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает $\frac{2}{3}$ своих изделий первым сортом и $\frac{1}{3}$ вторым сортом. Случайная величина X – число изделий первого сорта из взятых наугад четырех.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, в данной задаче:

$n = 4$ – всего изделий в выборке;
$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество изделий первого сорта в выборке.
P_n^x – вероятность того, что из n изделий ровно x будут первого сорта.
По условию:
$p = \frac{2}{3}$ – вероятность того, что изделие окажется первосортным.
$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что изделие будет второсортным.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}0123$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{2}{81} = \frac{8}{81} \approx 0{,}0988$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{81} = \frac{24}{81} \approx 0{,}2963$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 4 \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{81} \approx 0{,}3951$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81} \approx 0{,}1975$$

Таким образом, искомый закон распределения:

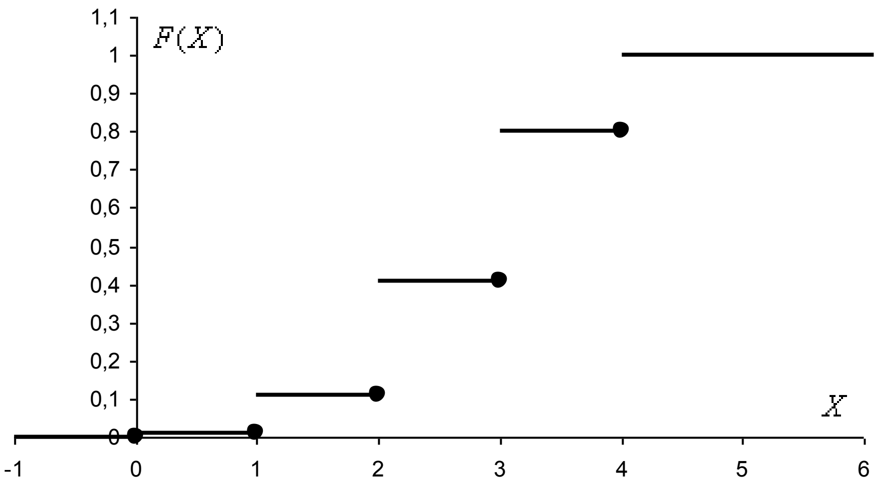
x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{81} \approx 0{,}0123$	$\frac{8}{81} \approx 0{,}0988$	$\frac{24}{81} \approx 0{,}2963$	$\frac{32}{81} \approx 0{,}3951$	$\frac{16}{81} \approx 0{,}1975$

Проверка: 0,0123 + 0,0988 + 0,2963 + 0,3951 + 0,1975 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ 0{,}0123 \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}1111 \ \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}4074 \ \ \textit{при} \ \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}8025 \ \ \textit{при} \ \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

математическое ожидание: $M(X) = np = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

дисперсию: $D(X) = npq = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$

Задача 22. 90% панелей, изготавливаемых на железобетонном заводе – высшего сорта. Случайная величина X – число панелей высшего сорта из четырех, взятых наугад.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего панелей в выборке;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество панелей высшего сорта в выборке.

P_n^x – вероятность того, что из n панелей ровно x будут высшего сорта.

Из условия следует:

$p = 0{,}9$ – вероятность того, что панель будет высшего сорта.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ – вероятность того, что панель не будет высшего сорта

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^4 = (0{,}1)^4 = 0{,}0001$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}0036$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^2 = 6 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}01 = 0{,}0486$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^1 = 4 \cdot (0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^0 = (0{,}9)^4 = 0{,}6561$$

Таким образом, искомый закон распределения:

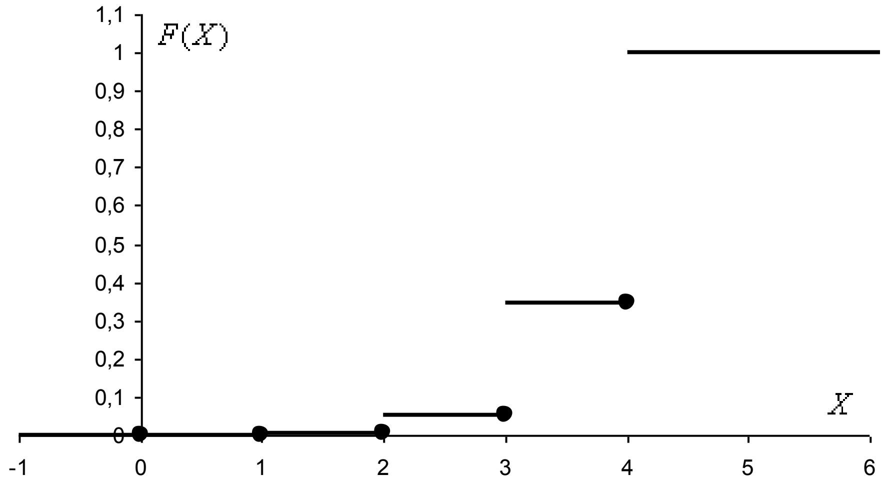
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Проверка: 0,0001 + 0,0036 + 0,0486 + 0,2916 + 0,6561 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ 0{,}0001 \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}0037 \ \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}0523 \ \ \textit{при} \ \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}3439 \ \ \textit{при} \ \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6$$

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}36$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Задача 23. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{6}$. Случайная величина X – число выигрышных билетов из четырех.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:
$n = 4$ – всего билетов в выборке;
$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество выигрышных билетов в выборке.
P_n^x – вероятность того, что из n билетов выиграют ровно x.

По условию:
$p = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что билет будет выигрышным.

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, что билет будет безвыигрышным.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx 0{,}3858$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{25}{216} \approx 0{,}1157$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4 \cdot \frac{5}{1296} = \frac{5}{324} \approx 0{,}0154$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{1296} \approx 0{,}0008$$

Таким образом, искомый закон распределения:

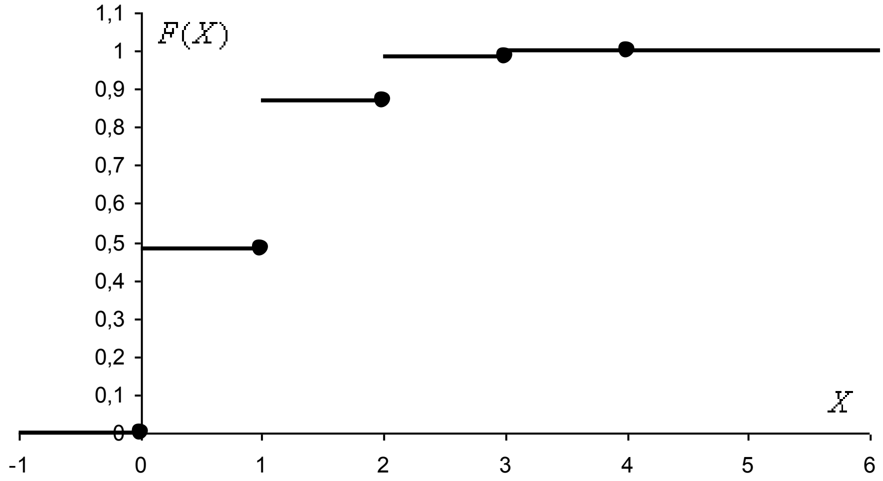
x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{625}{1296} \approx 0{,}4823$	$\frac{125}{324} \approx 0{,}3858$	$\frac{25}{216} \approx 0{,}1157$	$\frac{5}{324} \approx 0{,}0154$	$\frac{1}{1296} \approx 0{,}0008$

Проверка: 0,4823 + 0,3858 + 0,1157 + 0,0154 + 0,0008 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; \textit{при} \;\; x \le 0; \\ 0{,}4823 \;\; \textit{при} \;\; 0 < x \le 1; \\ 0{,}8681 \;\; \textit{при} \;\; 1 < x \le 2; \\ 0{,}9838 \;\; \textit{при} \;\; 2 < x \le 3; \\ 0{,}9992 \;\; \textit{при} \;\; 3 < x \le 4; \\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X)=np=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$D(X)=npq=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}7453$$

В Задачах № 24-26 требуется: составить ряд распределения случайной величины X, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Задача 24. Для лечения больных применяется метод лечения, который с вероятностью 0,75 дает положительный результат. На отделении находится 6 больных, при лечении которых используется данный метод

X – число больных, при лечении которых достигнут положительный результат.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x=C_n^x p^x q^{n-x}$, в данной задаче:

$n=6$ – всего больных;

$x=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ – вероятное количество вылеченных больных;

$p=0{,}75$ – вероятность того, что метод лечения даст положительный результат;

$q=1-p=1-0{,}75=0{,}25$ – вероятность того, что метод лечения не даст положительного результата;

P_n^x – вероятность того, что в x случаях из n метод лечения даст положительный результат.

0) $x=0$

$$P_6^0=C_6^0\cdot(0{,}75)^0\cdot(0{,}25)^6=(0{,}25)^6\approx 0{,}00024$$

1) $x=1$

$$P_6^1=C_6^1\cdot(0{,}75)^1\cdot(0{,}25)^5=6\cdot 0{,}75\cdot(0{,}25)^5\approx 0{,}00439$$

2) $x=2$

$$P_6^2=C_6^2\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4=\frac{5\cdot 6}{2}\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4=0{,}03296$$

3) $x=3$

$$P_6^3=C_6^3\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3=0{,}13184$$

4) $x=4$

$$P_6^4=C_6^4\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2=\frac{5\cdot 6}{2}\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2=0{,}29663$$

5) $x=5$

$$P_6^5=C_6^5\cdot(0{,}75)^5\cdot(0{,}25)^1=6\cdot(0{,}75)^5\cdot 0{,}25=0{,}35596$$

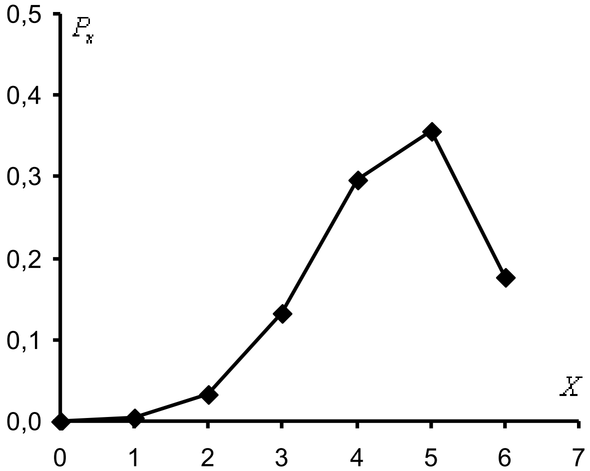
6) $x=6$

$$P_6^6=C_6^6\cdot(0{,}75)^6\cdot(0{,}25)^0=(0{,}75)^6=0{,}17798$$

Таким образом, искомый закон распределения:

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	$p(x_i)$	0,00024	0,00439	0,03296	0,13184	0,29663	0,35596	0,17798	$\sum = 1$

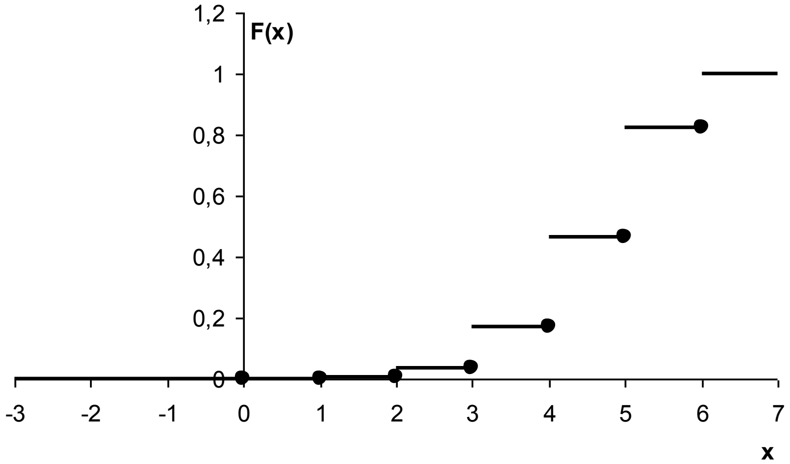
Построим полигон распределения:



Найдем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ 0{,}00024 \ \ \textit{при} \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}00464 \ \ \textit{при} \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}03760 \ \ \textit{при} \ \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}16943 \ \ \textit{при} \ \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}46606 \ \ \textit{при} \ \ 4 < x \le 5; \\ 0{,}82202 \ \ \textit{при} \ \ 5 < x \le 6; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x > 6. \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 6 \cdot 0{,}75 = 4{,}5$
и дисперсию: $D(X) = npq = 6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 1{,}125$

Задача 25. При перевозке повреждается в среднем одна деталь из 12. Отправлена партия из 6 деталей.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, в данной задаче:

$n = 6$ – всего деталей;

$x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ – вероятное количество поврежденных деталей.

Из условия следует, что:

$p = \dfrac{1}{12}$ – вероятность того, что деталь будет повреждена;

$q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$ – вероятность того, что деталь не будет повреждена;

P_n^x – вероятность того, что из n деталей ровно x будут повреждены.

0) $x = 0$

$$P_6^0 = C_6^0 \cdot (1/12)^0 \cdot (11/12)^6 = (11/12)^6 \approx 0{,}5932922$$

1) $x = 1$

$$P_6^1 = C_6^1 \cdot (1/12)^1 \cdot (11/12)^5 = 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot (11/12)^5 \approx 0{,}3236139$$

2) $x = 2$

$$P_6^2 = C_6^2 \cdot (1/12)^2 \cdot (11/12)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (1/12)^2 \cdot (11/12)^4 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (1/12)^2 \cdot (11/12)^4 \approx 0{,}0735486$$

3) $x = 3$

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot (1/12)^3 \cdot (11/12)^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot (1/12)^3 \cdot (11/12)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot (1/12)^3 \cdot (11/12)^3 \approx 0{,}0089150$$

4) $x = 4$

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot (1/12)^4 \cdot (11/12)^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot (1/12)^4 \cdot (11/12)^2 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (1/12)^4 \cdot (11/12)^2 \approx 0{,}0006078$$

5) $x = 5$

$$P_6^5 = C_6^5 \cdot (1/12)^5 \cdot (11/12)^1 = 6 \cdot (1/12)^5 \cdot \frac{11}{12} \approx 0{,}0000221$$

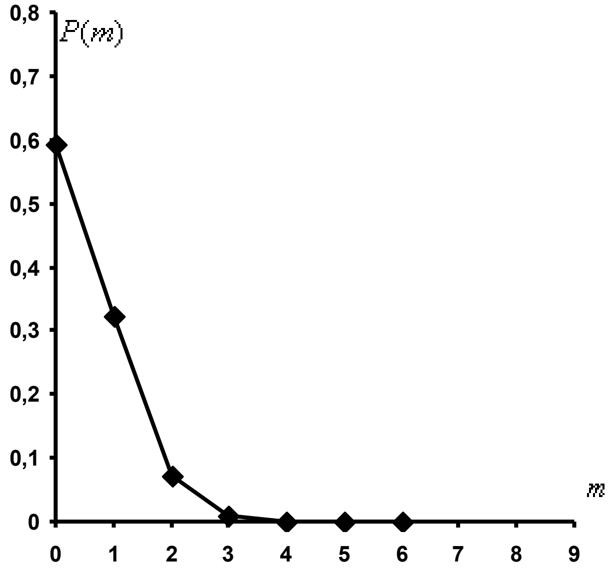
6) $x = 6$

$$P_6^6 = C_6^6 \cdot (1/12)^6 \cdot (11/12)^0 = (1/12)^6 \approx 0{,}0000003$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	$p(x_i)$	0,5932922	0,3236139	0,0735486	0,0089150	0,0006078	0,0000221	0,0000003	$\sum = 1$

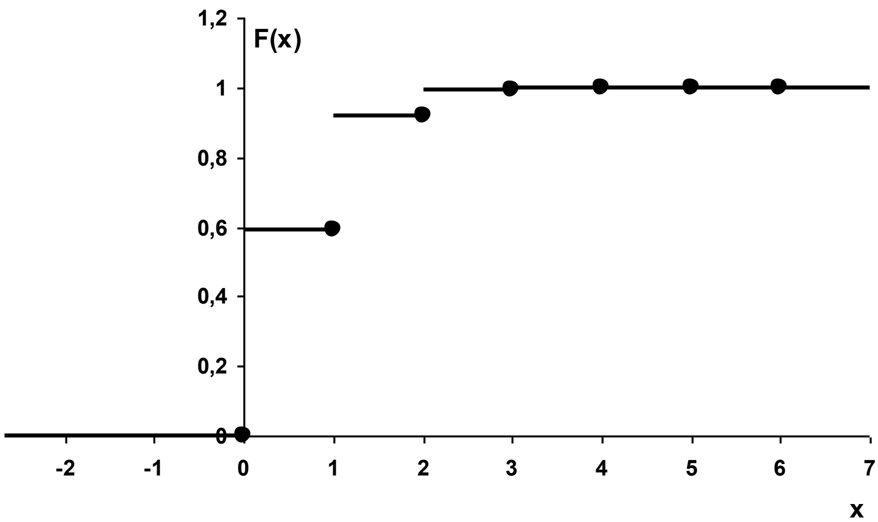
Построим полигон распределения:



Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ 0{,}5932922 \ \ при \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}9169061 \ \ при \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}9904547 \ \ при \ \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}9993697 \ \ при \ \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}9999776 \ \ при \ \ 4 < x \le 5; \\ 0{,}9999997 \ \ при \ \ 5 < x \le 6; \\ 1 \ \ при \ \ x > 6. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

Вычислим дисперсию: $D(X) = npq = 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{24} \approx 0{,}46$

Задача 26. В гараже 6 машин. Вероятность выхода из строя в течение дня отдельной машины равна 0,1.

Случайная величина X – числа машин в исправном состоянии

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, в данной задаче:

$n = 6$ – всего машин в гараже;

$x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ – вероятное количество исправных машин.

P_n^x – вероятность того, что из n машин ровно x будут в исправном состоянии.

По условию:

$q = 0,1$ – вероятность выхода из строя машины в течение дня, тогда:

$p = 1 - q = 1 - 0,1 = 0,9$ – вероятность того, что машина будет исправна.

0) $x = 0$

$P_6^0 = C_6^0 \cdot (0,9)^0 \cdot (0,1)^6 = (0,1)^6 \approx 0,000001$

1) $x = 1$

$P_6^1 = C_6^1 \cdot (0,9)^1 \cdot (10,1)^5 = 6 \cdot 0,9 \cdot (0,1)^5 \approx 0,000054$

2) $x = 2$

$$P_6^2 = C_6^2 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^4 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^4 \approx 0,001215$$

3) $x = 3$

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot (0,9)^3 \cdot (0,1)^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot (0,9)^3 \cdot (0,1)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot (0,9)^3 \cdot (0,1)^3 \approx 0,01458$$

4) $x = 4$

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot (0,9)^4 \cdot (0,1)^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot (0,9)^4 \cdot (0,1)^2 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (0,9)^4 \cdot (0,1)^2 \approx 0,098415$$

5) $x = 5$

$P_6^5 = C_6^5 \cdot (0,9)^5 \cdot (0,1)^1 = 6 \cdot (0,9)^5 \cdot 0,1 \approx 0,354294$

6) $x = 6$

$P_6^6 = C_6^6 \cdot (0,9)^6 \cdot (0,1)^0 = (0,9)^6 \approx 0,531441$

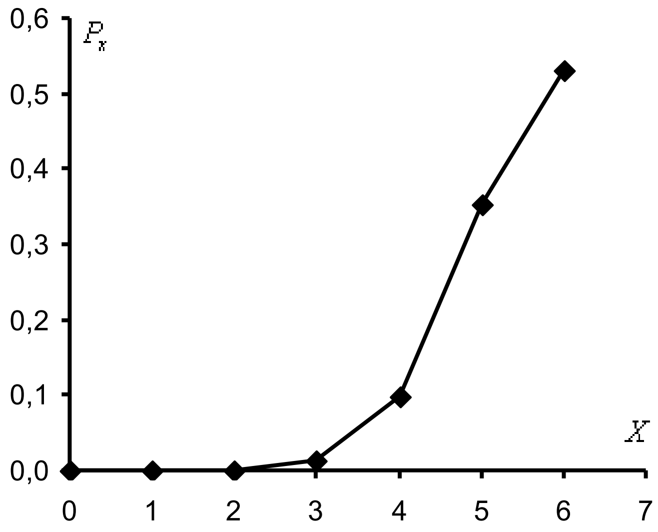
Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	$p(x_i)$	0,000001	0,000054	0,001215	0,01458	0,098415	0,354294	0,531441	$\sum = 1$

Вычислим математическое ожидание: $M(X) = np = 6 \cdot 0,9 = 5,4$

Вычислим дисперсию: $D(X) = npq = 6 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,54$

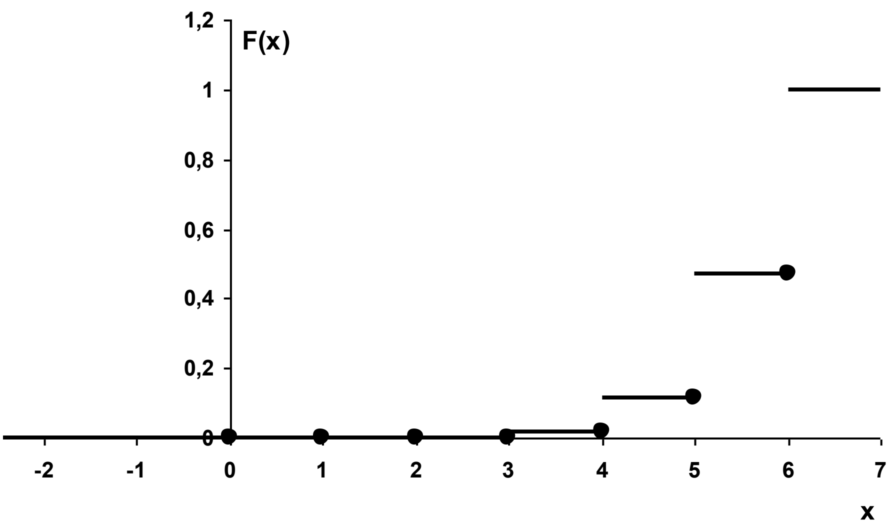
Построим полигон распределения:



Составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x\le 0;\\ 0{,}000001 \ \textit{при} \ \ 0<x\le 1;\\ 0{,}000055 \ \textit{при} \ 1<x\le 2;\\ 0{,}001270 \ \textit{при} \ \ 2<x\le 3;\\ 0{,}015850 \ \textit{при} \ \ 3<x\le 4;\\ 0{,}114265 \ \textit{при} \ \ 4<x\le 5;\\ 0{,}468559 \ \textit{при} \ \ 5<x\le 6;\\ 1 \ \textit{при} \ \ x>6.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Задача 27. Вероятность появления события A в каждом из 12 повторных испытаний $P(A)=0{,}75$. Определить среднее значение и дисперсию случайной величины числа появления события A в 12 независимых повторных испытаниях.

Решение: данная случайная величина имеет биномиальное распределение Математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию вычислим по соответствующим формулам:

$M(X)=np=12\cdot 0{,}75=9$

$D(X)=npq=9\cdot 0{,}25=2{,}25$

Ответ: $M(X)=9$, $D(X)=2{,}25$

Задача 28. Составить закон распределения числа появлений события A при 8 независимых испытаниях, если $P(A)=p=0{,}8$.

Решение: используем формулу Бернулли:

$P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n=8$ – всего независимых испытаний;

$m=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ – вероятное количество наступлений события A в восьми испытаниях;

$p=0{,}8$ – вероятность наступления события A в каждом испытании;

$q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$ – вероятность того, что событие A не наступит в каждом из испытаний;

P_8^m – вероятность того, что в 8 испытаниях событие A наступит ровно m раз.

Используя формулу Бернулли, построим биномиальный закон распределения числа появлений события A в 8 испытаниях:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_8^m	0,00000256	0,00008192	0,0011469	0,00917504	0,0458752	0,14680064	0,29360128	0,33554432	0,16777216

Задача 29. Написать закон распределения указанной случайной величины, вычислить среднее значение и дисперсию случайной величины, начертить многоугольник распределения, построить график функции распределения данной случайной величины X.

Монету подбрасывают 9 раз. Случайная величина X – число появления герба в 9 бросаниях монеты.

Решение: случайная величина X имеет биномиальное распределение. Построим закон распределения случайной величины, используем формулу Бернулли:

$P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n=9$ – всего бросков;

m – вероятное количество выпадения герба;

$p=0{,}5$ – вероятность выпадения герба;

$q=1-p=1-0{,}5=0{,}5$ – вероятность выпадение цифры;

P_9^m – вероятность того, что в 9 бросках герб выпадет ровно m раз.

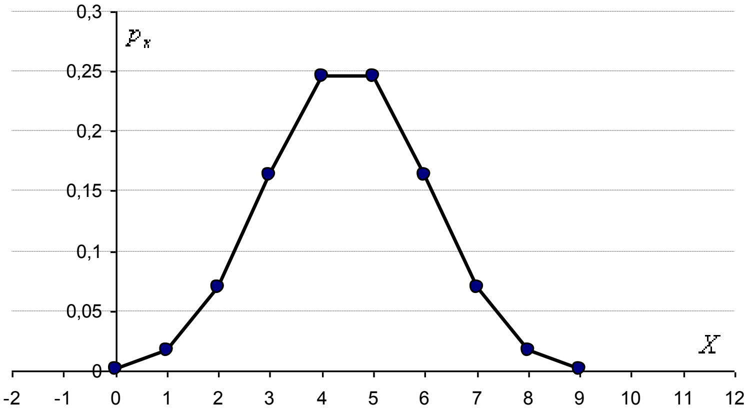
Построим биномиальный ряд распределения (округление до 6 знаков):

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_n^m	0,001953	0,017578	0,070313	0,164063	0,246094	0,246094	0,164063	0,070313	0,017578	0,001953
Накопленные	0,001953	0,019531	0,089844	0,253906	0,5	0,746094	0,910156	0,980469	0,998047	1

Найдем математическое ожидание: $M(X) = np = 9 \cdot 0,5 = 4,5$

Найдем дисперсию: $D(X) = npq = 9 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 2,25$

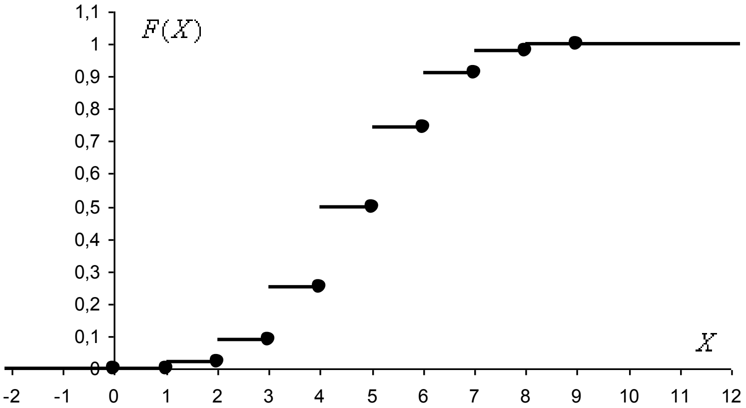
Построим многоугольник распределения:



Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ 0,001953 \ \ при \ \ 0 < x \le 1; \\ 0,019531 \ \ при \ \ 1 < x \le 2; \\ 0,089844 \ \ при \ \ 2 < x \le 3; \\ 0,253906 \ \ при \ \ 3 < x \le 4; \\ 0,5 \ \ при \ \ 4 < x \le 5; \\ 0,746094 \ \ при \ \ 5 < x \le 6; \\ 0,910156 \ \ при \ \ 6 < x \le 7; \\ 0,980469 \ \ при \ \ 7 < x \le 8; \\ 0,998047 \ \ при \ \ 8 < x \le 9; \\ 1 \ \ при \ \ x > 9. \end{cases}$$

Выполним чертёж:



5. Задачи на распределение Пуассона

Задача 30. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,004. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность того, что было 9 сбоев.

Решение: используем формулу Пуассона:

$P_m = \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}004 = 2$ – среднее количество сбоев;

$m = 9$.

Таким образом:

$P_9 = \dfrac{2^9}{9!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}0002$ – вероятность того, что будет 9 сбоев.

Ответ: $P_9 \approx 0{,}0002$

Задача 31. Среди семян ржи 0,04% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

В данном случае:

$\lambda = np = 5000 \cdot (0{,}01 \cdot 0{,}04) = 2$ – среднее количество сорных семян;

$m = 5$ – искомое количество сорных семян.

Таким образом:

$P_5 \approx \dfrac{2^5}{5!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}0361$ – вероятность того, что среди пяти тысяч семян ржи будет ровно 5 сорных семян.

Ответ: $\approx 0{,}0361$

Задача 32. Вероятность того, что на строительной панели окажутся трещины, равна 0,002. На стройку поступила партия из 400 панелей. Найти вероятность того, что с трещинами окажется 5 панелей; от 3 до 7 панелей.

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

В данном случае:

$\lambda = np = 400 \cdot 0{,}002 = 0{,}8$ – среднее количество панелей с трещинами в данной партии;

$m = 5$ – вероятное количество панелей с трещинами.

Таким образом:

$P_5 \approx \frac{(0,8)^5}{5!} \cdot e^{-0,8} \approx 0,0012$ – вероятность того, что с трещинами окажется 5 панелей.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(3 \le m \le 7) \approx P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 \approx 0,0383 + 0,0077 + 0,0012 + 0,0002 + 0,0000 =$
$= 0,0474$ – вероятность того, что с трещинами окажется от 3 до 7 панелей.

Ответ: $P_5 \approx 0,0012$ $\qquad$ $P(3 \le m \le 7) \approx 0,0474$

Задача 33. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, равна 0,0007. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) ровно 1 бракованную книгу; б) хотя бы одну бракованную книгу.

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

В данном случае:

$\lambda = np = 0,0007 \cdot 10000 = 7$ – среднее ожидаемое количество бракованных экземпляров в тираже.

$m = 1$ – вероятное количество бракованных экземпляров в тираже.

а) По формуле Пуассона:

$P_1 \approx \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} \approx 0,0064$ – вероятность того, что тираж содержит ровно 1 бракованную книгу.

б)

$P_0 \approx \frac{7^0}{0!} \cdot e^{-7} \approx 0,0009$ – вероятность того, что тираж не содержит бракованных книг.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \ge 1) \approx 1 - 0,0009 = 0,9991$ – вероятность того, что тираж содержит хотя бы одну бракованную книгу.

Ответ: а) $\approx 0,0063$ $\qquad$ б) $\approx 0,9991$

Задача 34. Вероятность наступления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,002. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 3 раз.

Решение: используем формулу Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

В данном случае:

$\lambda = np = 900 \cdot 0,002 = 1,8$

m – вероятное количество появлений события A.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(m<3)\approx P_0+P_1+P_2\approx\frac{1{,}8^0}{0!}\cdot e^{-1{,}8}+\frac{1{,}8^1}{1!}\cdot e^{-1{,}8}+\frac{1{,}8^2}{2!}\cdot e^{-1{,}8}=$$

$=0{,}1653+0{,}2975+0{,}2678=0{,}7306$ – вероятность того, что в 900 независимых испытаниях событие A появится менее трёх раз.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m\geq 3)=1-P(m<3)\approx 1-0{,}7306=0{,}2694$ – вероятность того, что в 900 независимых испытаниях событие A появится не менее трёх раз.

Ответ: $\approx 0{,}2694$

Задача 35. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак.

Решение: используем формулу Пуассона $P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$, найдём:

$P_3=\frac{3^3}{3!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}2240$ – вероятность того, что будет совершено 3 три атаки.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q=0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6=0{,}216$ – вероятностью того, что 3 атаки окажутся неуспешными.

Тогда: $p=1-q=1-0{,}216=0{,}784$ – вероятность того, что бомбардировщик в трёх атаках будет поражен хотя бы один раз.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P_3\cdot p\approx 0{,}2240\cdot 0{,}784\approx 0{,}1756$ – вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак

Ответ: $\approx 0{,}1756$

Задача 36. При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой

Решение: Используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче: $\lambda=1{,}5$ – число сбоев сутки.

Найдем вероятность того, что за сутки не будет сбоев.

$P_0=\frac{1{,}5^0}{0!}\cdot e^{-1{,}5}\approx 0{,}2231$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m\geq 1)=1-P_0\approx 1-0{,}2231\approx 0{,}777$ – вероятность того, что за сутки будет хотя бы один сбой.

Ответ: $\approx 0{,}777$

Задача 37. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший пуассоновский поток. Математическое ожидание числа вызовов за 1 ч равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин. поступит не менее двух вызовов.

Решение: используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = \frac{N}{60} = \frac{30}{60} = 0{,}5$ – среднее количество вызовов в минуту;

Найдем вероятность того, что за одну минуту станция получит менее двух вызовов. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(m < 2) = P_0 + P_1 = \frac{0{,}5^0}{0!} \cdot e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^1}{1!} \cdot e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065 + 0{,}3033 = 0{,}9098$$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \geq 2) = 1 - P(m < 2) \approx 1 - 0{,}9098 = 0{,}0902$ – вероятность того, что за одну минуту станция получит не менее двух вызовов

Ответ: $\approx 0{,}0902$

Задача 38. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час $N = 60$ вызовов. Определить вероятность того, что за данную минуту она получит: ровно два вызова; более двух.

Решение: используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = \frac{N}{60} = \frac{60}{60} = 1$ – среднее количество вызовов в минуту;

$m = 2$ – искомое количество вызовов в минуту.

Таким образом:

$P_2 = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}1839$ – вероятность того, что за данную минуту станция получит ровно два вызова.

Найдем вероятность того, что за данную минуту станция получит не более двух вызовов:

$$P(m \leq 2) = P_0 + P_1 + P_2 \approx 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197$$

Используя теорему о противоположных событиях, найдем вероятность того, что за данную минуту станция получит более двух вызовов:

$P(m > 2) = 1 - P(m \leq 2) \approx 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803$ – искомая вероятность.

Ответ: $P_2 \approx 0{,}1839$, $P(m > 2) \approx 0{,}0803$

Задача 39. Средняя сдельная выработка часового мастера за 1 час составляет 3 заказа. Найти вероятность того, что: а) за 2 часа он выполнит 7 заказов; б) за 2/3 часа он выполнит менее 3 заказов

Решение: используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

а) $\lambda = 3 \cdot 2 = 6$ – среднее количество заказов за 2 часа;
$m = 7$ – искомое количество заказов за 2 часа.
Таким образом:

$P_7 \approx \frac{6^7}{7!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}1377$ – вероятность того, что за 2 часа мастер выполнит ровно 7 заказов.

б) $\lambda = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ – среднее количество заказов за 2/3 часа;
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(m < 3) \approx P_0 + P_1 + P_2 \approx 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767$ – вероятность того, что за 2/3 часа мастер выполнит менее 3 заказов.

Ответ: а) $P_7 \approx 0{,}1377$ б) $P(m < 3) \approx 0{,}6767$

Задача 40. Распространитель театральных билетов реализует за час в среднем 4 билета. Найти вероятность того, что: а) за 3 часа он продаст 10 билетов; б) за 45 минут не менее 3 билетов.

Решение: используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

а) $\lambda = 3 \cdot 4 = 12$ – среднее количество проданных билетов за 3 часа;
$m = 10$ – искомое количество проданных билетов за 3 часа.

Таким образом:

$P_{10} \approx \frac{12^{10}}{10!} \cdot e^{-12} \approx 0{,}1048$ – вероятность того, что за 3 часа будет продано 10 билетов.

б) $\lambda = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ – среднее количество проданных билетов за 3/4 часа.
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(m < 3) \approx P_0 + P_1 + P_2 \approx 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$ – вероятность того, что за 45 минут будет продано менее 3 билетов.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:
$P(m \geq 3) = 1 - P(m < 3) \approx 1 - 0{,}4232 = 0{,}5768$ – вероятность того, что за 45 минут будет продано не менее 3 билетов.

Ответ: а) $P_{10} \approx 0{,}1048$ б) $P(m \geq 3) \approx 0{,}5768$

6. Гипергеометрическое распределение вероятностей

Задача 41. В группе из шести человек два отличника. Наугад выбрали двух человек. Составить закон распределения случайной величины X – число отличников среди выбранных. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$P_x = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, в данной задаче:

$N = 6$ – всего людей;
$M = 2$ – общее количество отличников;
$n = 2$ – размер выборки;
$x = \{0,1,2\}$ – возможное количество отличников в выборке.

$C_N^n = C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способами можно выбрать двух человек.

0) $x = 0$ – в выборке нет отличников.

$$P_0 = \frac{C_2^0 \cdot C_4^2}{C_6^2} = \frac{1\cdot 6}{15} = \frac{6}{15}$$

1) $x = 1$ – в выборке один отличник.

$$P_1 = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1}{C_6^2} = \frac{2\cdot 4}{15} = \frac{8}{15}$$

2) $x = 2$ – в выборке два отличника.

$$P_2 = \frac{C_2^2 \cdot C_4^0}{C_6^2} = \frac{1\cdot 1}{15} = \frac{1}{15}$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

X	x_i	0	1	2	
	p_i	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\sum = 1$

Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot\frac{6}{15} + 1\cdot\frac{8}{15} + 2\cdot\frac{1}{15} = 0 + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0^2\cdot\frac{6}{15} + 1^2\cdot\frac{8}{15} + 2^2\cdot\frac{1}{15} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{12}{15} - \frac{4}{9} = \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{36}{45} - \frac{20}{45} = \frac{16}{45}$$

Задача 42. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных. Составить закон распределения указанной случайной величины X – числа неисправных аппаратов среди трех случайным образом отобранных. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$p_x = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:

$N = 15$ – всего телефонных аппаратов;

$M = 5$ – количество неисправных телефонных аппаратов;

$n = 3$ – размер выборки;

$x = \{0,1,2,3\}$ – возможное количество неисправных телефонных аппаратов в выборке.

$C_{15}^3 = \frac{15!}{12!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{6} = 455$ способами можно выбрать 3 телефонных аппарата.

0) $x = 0$

$$p_0 = \frac{C_5^0 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} \approx 0{,}264$$

1) $x = 1$

$$p_1 = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{5\cdot 45}{455} \approx 0{,}495$$

2) $x = 2$

$$p_2 = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{10\cdot 10}{455} \approx 0{,}220$$

3) $x = 3$

$$p_3 = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \frac{10}{455} \approx 0{,}022$$

Таким образом, искомый закон распределения:

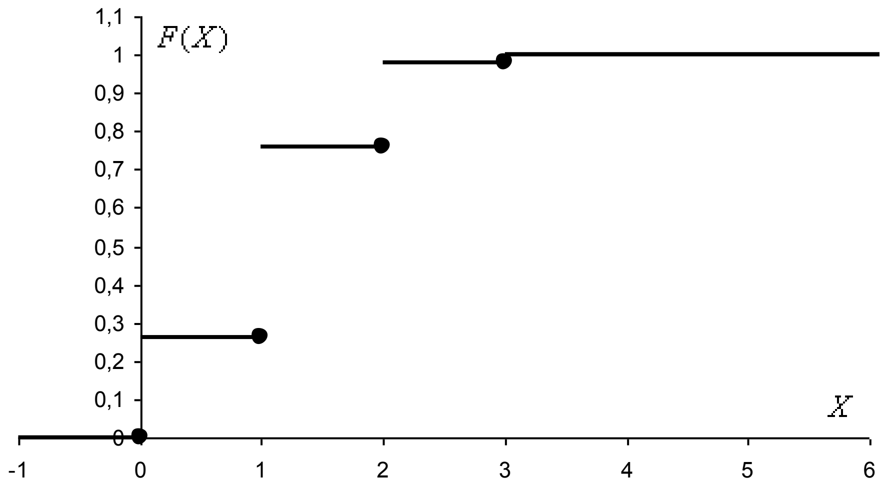
x_i	0	1	2	3
p_i	0,264	0,495	0,219	0,022

Проверка: 0,264 + 0,495 + 0,219 + 0,022 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ 0{,}264 \ \ при \ \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}759 \ \ при \ \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}978 \ \ при \ \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \ при \ \ x > 3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание и дисперсию, используем соответствующие формулы для гипергеометрического распределения:

$$M(X)=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{5}{15}\cdot 3=1$$

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{5}{15}\cdot 3\cdot\frac{12}{15}\cdot\frac{10}{14}=\frac{4}{7}\approx 0{,}571$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{4}{7}}\approx 0{,}76$

Задача 43. Партия из 50 изделий содержит 5 бракованных. Из партии наугад взято 3 изделия. Пусть X – число бракованных изделий среди трех взятых. Составьте закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$, $D(X)$.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$p_x=\frac{C_M^x\cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:
$N=50$ – всего изделий в партии;
$M=5$ – количество бракованных изделий;
$n=3$ – размер выборки;
$x=\{0,1,2,3\}$ – возможное количество бракованных изделий в выборке.

$C_{50}^3=\frac{50!}{47!\cdot 3!}=\frac{48\cdot 49\cdot 50}{6}=19600$ способами можно выбрать 3 изделия из 50.

0) $x = 0$

$$p_1 = \frac{C_5^0 \cdot C_{45}^3}{C_{50}^3} = \frac{1 \cdot \frac{45!}{42!3!}}{19600} = \frac{14190}{19600} = \frac{1419}{1960}$$

1) $x = 1$

$$p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^3} = \frac{5 \cdot \frac{45!}{43!2!}}{19600} = \frac{4950}{19600} = \frac{99}{392}$$

2) $x = 2$

$$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^3} = \frac{10 \cdot 45}{19600} = \frac{450}{19600} = \frac{9}{392}$$

3) $x = 3$

$$p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^3} = \frac{10 \cdot 1}{19600} = \frac{1}{1960}$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

X	x_i	0	1	2	3	
	p_i	$\frac{1419}{1960}$	$\frac{99}{392}$	$\frac{9}{392}$	$\frac{1}{1960}$	$\sum = 1$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{M}{N} \cdot n = \frac{5}{50} \cdot 3 = 0{,}3$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X) = \frac{M}{N} \cdot n \cdot \frac{(N-n)}{N} \cdot \frac{(N-M)}{(N-1)} = \frac{5}{50} \cdot 3 \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{45}{49} \approx 0{,}26$$

Задача 44. В ящике находится 17 однотипных деталей, из которых 7 деталей имеют брак. Случайная величина X – число деталей с браком среди взятых 4 деталей.

1) Составить закон распределения случайной величины X.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$p_x = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:

$N = 17$ – всего деталей в ящике;

$M = 7$ – количество деталей с браком;

$n = 4$ – размер выборки;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – возможное количество деталей с браком в выборке.

$C_{17}^4 = \frac{17!}{13! \cdot 4!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{24} = 2380$ способами можно извлечь 4 детали из ящика.

0) $x=0$

$$p_0=\frac{C_7^0\cdot C_{10}^4}{C_{17}^4}=\frac{1\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24}}{2380}\approx 0{,}088$$

1) $x=1$

$$p_1=\frac{C_7^1\cdot C_{10}^3}{C_{17}^4}=\frac{7\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}}{2380}\approx 0{,}353$$

2) $x=2$

$$p_2=\frac{C_7^2\cdot C_{10}^2}{C_{17}^4}=\frac{\frac{6\cdot 7}{2}\cdot\frac{9\cdot 10}{2}}{2380}\approx 0{,}397$$

3) $x=3$

$$p_3=\frac{C_7^3\cdot C_{10}^1}{C_{17}^4}=\frac{\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}\cdot 10}{2380}\approx 0{,}147$$

4) $x=4$

$$p_4=\frac{C_7^4\cdot C_{10}^0}{C_{17}^4}=\frac{35}{2380}\approx 0{,}015$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

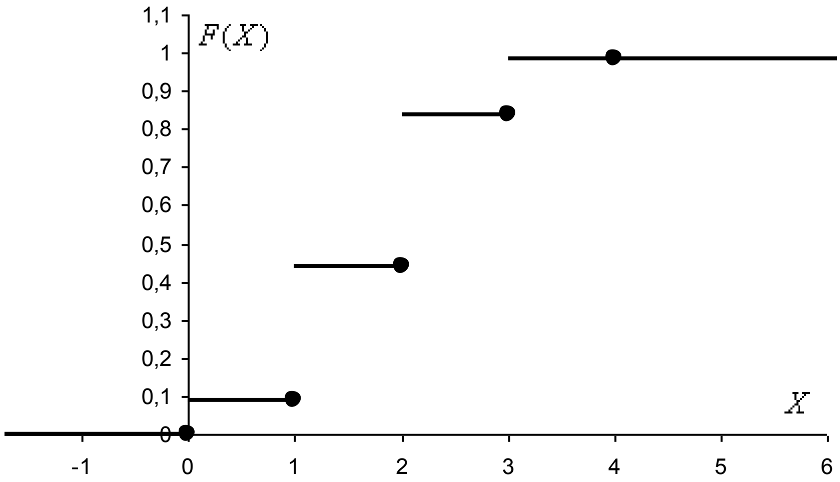
X	x_i	0	1	2	3	4	
	p_i	0,088	0,353	0,397	0,147	0,015	$\sum=1$

2) Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график.

Решение: составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x\le 0;\\ 0{,}088 \ \textit{при} \ 0<x\le 1;\\ 0{,}441 \ \textit{при} \ 1<x\le 2;\\ 0{,}838 \ \textit{при} \ 2<x\le 3;\\ 0{,}985 \ \textit{при} \ 3<x\le 4;\\ 1 \ \textit{при} \ x>4.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



3) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X.

Решение: используем формулы для гипергеометрического распределения:

$$M(X)=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{7}{17}\cdot 4=\frac{28}{17}\approx 1{,}65$$

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{7}{17}\cdot 4\cdot\frac{13}{17}\cdot\frac{10}{16}=\frac{455}{578}\approx 0{,}787$$

Задача 45. Для исследования в стае из 50 редких птиц окольцевали 10 особей. Через некоторое время отловили 5 птиц.

Для случайной величины X – числа окольцованных птиц среди отловленных, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$p_x=\frac{C_M^x\cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:

$N=50$ – всего птиц в стае;
$M=10$ – количество окольцованных птиц;
$n=5$ – размер выборки;
$x=\{0,1,2,3,4,5\}$ – возможное количество окольцованных птиц в выборке.

$C_{50}^5=\frac{50!}{45!\cdot 5!}=\frac{46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{120}=2118760$ способами можно выбрать 5 птиц из 50.

0) $x=0$

$$p_0=\frac{C_{10}^0\cdot C_{40}^5}{C_{50}^5}=\frac{658008}{2118760}=\frac{82251}{264845}\approx 0{,}31056$$

1) $x=1$

$$p_1=\frac{C_{10}^1\cdot C_{40}^4}{C_{50}^5}=\frac{10\cdot 91390}{2118760}=\frac{45695}{105938}\approx 0{,}43134$$

2) $x=2$

$$p_2=\frac{C_{10}^2\cdot C_{40}^3}{C_{50}^5}=\frac{45\cdot 9880}{2118760}=\frac{11115}{52969}\approx 0{,}20984$$

3) $x=3$

$$p_3=\frac{C_{10}^3\cdot C_{40}^2}{C_{50}^5}=\frac{120\cdot 780}{2118760}=\frac{2340}{52969}\approx 0{,}04418$$

4) $x=4$

$$p_4=\frac{C_{10}^4\cdot C_{40}^1}{C_{50}^5}=\frac{210\cdot 40}{2118760}=\frac{60}{15134}\approx 0{,}00396$$

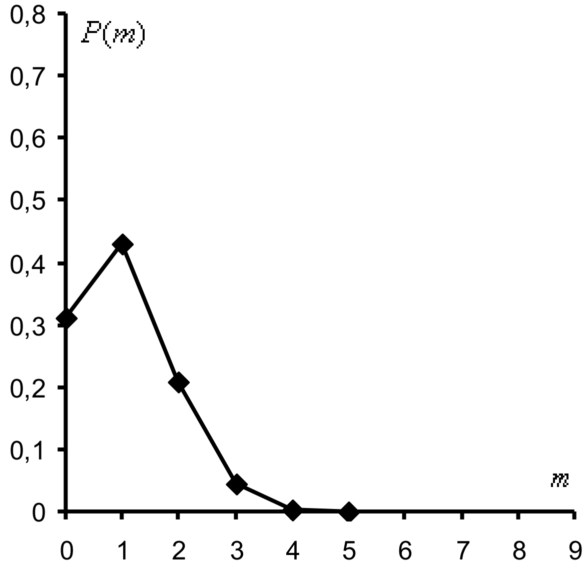
5) $x=5$

$$p_5=\frac{C_{10}^5\cdot C_{40}^0}{C_{50}^5}=\frac{252}{2118760}=\frac{9}{75670}\approx 0{,}00012$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X :

X	x_i	0	1	2	3	4	5	
	p_i	0,31056	0,43134	0,20984	0,04418	0,00396	0,00012	$\sum=1$

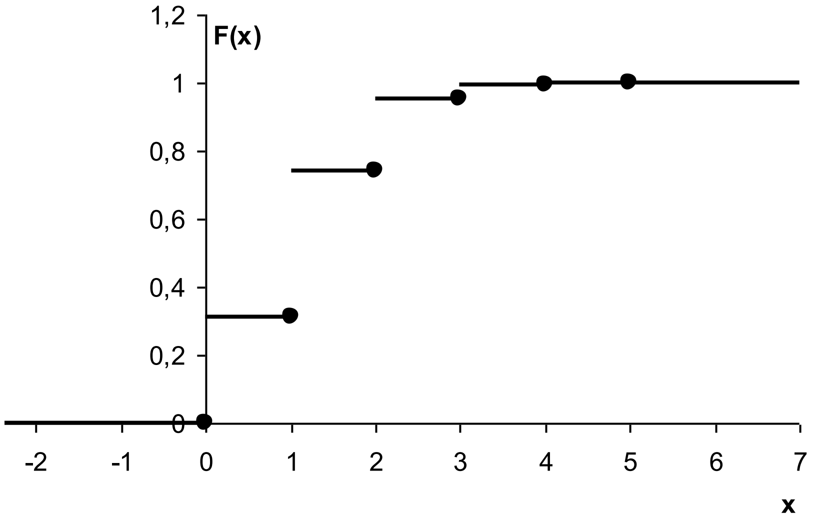
Построим полигон распределения:



Составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ x\le 0; \\ 0{,}31056 \ \ при \ \ 0<x\le 1; \\ 0{,}74190 \ \ при \ 1<x\le 2; \\ 0{,}95174 \ \ при \ \ 2<x\le 3; \\ 0{,}99592 \ \ при \ \ 3<x\le 4; \\ 0{,}99988 \ \ при \ \ 4<x\le 5; \\ 1 \ при \ x>5. \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{10}{50}\cdot 5=1$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{10}{50}\cdot 5\cdot\frac{45}{50}\cdot\frac{40}{49}=\frac{36}{49}\approx 0{,}7347$$

Задача 46. Среди присутствующих на празднике 20 мальчиков и 30 девочек разыгрываются 6 призов следующим образом. В коробку опускают 20 желтых и 30 красных шаров, перемешивают и наугад достают 6 шаров. Число желтых шаров – количество подарков мальчикам, число красных шаров – подарки девочкам

Для случайной величины X – числа девочек, получивших подарки, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$p_x=\frac{C_M^x\cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:
$N = 50$ – всего детей (и шаров);
$M = 30$ – количество девочек (красных шаров);
$n = 6$ – размер выборки;
$x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ – возможное количество призов, полученных девочками.

$C_{50}^{6} = \frac{50!}{44!\cdot 6!} = \frac{45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{720} = 15890700$ способами можно извлечь 6 шаров из коробки.

0) $x = 0$

$$p_0 = \frac{C_{30}^{0}\cdot C_{20}^{6}}{C_{50}^{6}} = \frac{38760}{15890700} \approx 0{,}002439$$

1) $x = 1$

$$p_1 = \frac{C_{30}^{1}\cdot C_{20}^{5}}{C_{50}^{6}} = \frac{30\cdot 15504}{15890700} \approx 0{,}029270$$

2) $x = 2$

$$p_2 = \frac{C_{30}^{2}\cdot C_{20}^{4}}{C_{50}^{6}} = \frac{435\cdot 4845}{15890700} \approx 0{,}132629$$

3) $x = 3$

$$p_3 = \frac{C_{30}^{3}\cdot C_{20}^{3}}{C_{50}^{6}} = \frac{4060\cdot 1140}{15890700} \approx 0{,}291265$$

4) $x = 4$

$$p_4 = \frac{C_{30}^{4}\cdot C_{20}^{2}}{C_{50}^{6}} = \frac{27405\cdot 190}{15890700} \approx 0{,}327673$$

5) $x = 5$

$$p_4 = \frac{C_{30}^{5}\cdot C_{20}^{1}}{C_{50}^{6}} = \frac{142506\cdot 20}{15890700} \approx 0{,}179358$$

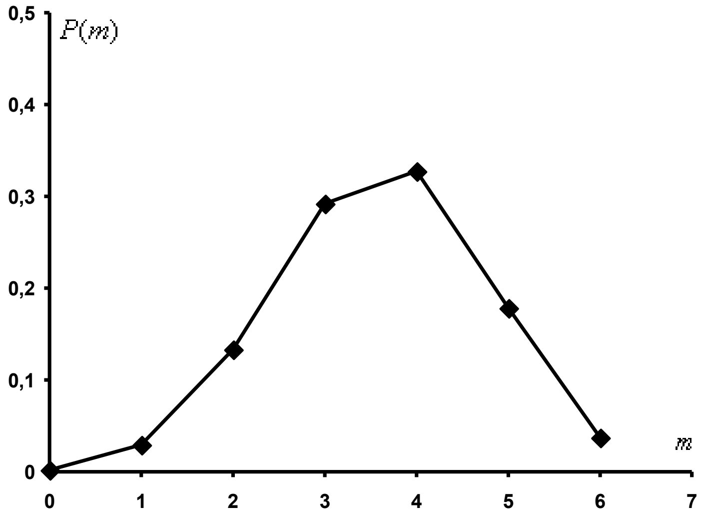
6) $x = 6$

$$p_6 = \frac{C_{30}^{6}\cdot C_{20}^{0}}{C_{50}^{6}} = \frac{593775}{15890700} \approx 0{,}037366$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X :

X	x_i	0	1	2	3	4	5	6	
	p_i	0,002439	0,029270	0,132629	0,291265	0,327673	0,179358	0,037366	$\sum = 1$

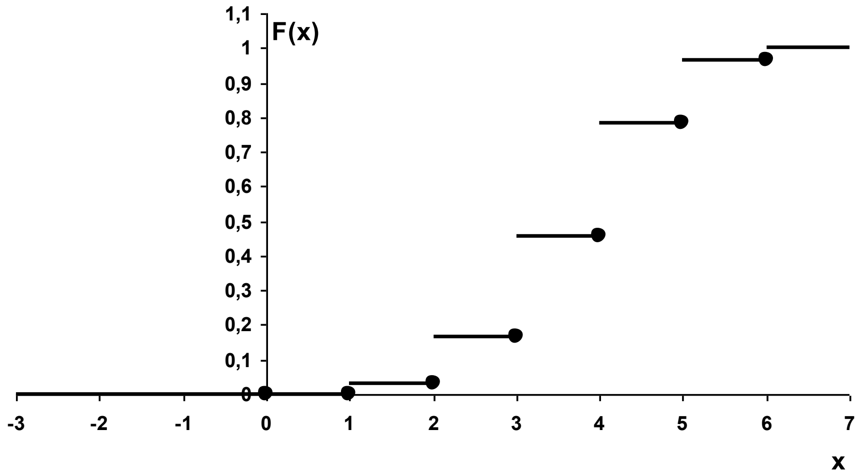
Изобразим полигон распределения:



Составим функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x\le 0;\\ 0{,}002439 \ \ \textit{при} \ \ 0<x\le 1;\\ 0{,}031709 \ \ \textit{при} \ \ 1<x\le 2;\\ 0{,}164339 \ \ \textit{при} \ \ 2<x\le 3;\\ 0{,}455603 \ \ \textit{при} \ \ 3<x\le 4;\\ 0{,}783276 \ \ \textit{при} \ \ 4<x\le 5;\\ 0{,}962634 \ \ \textit{при} \ \ 5<x\le 6;\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x>6.\end{cases}$$

Выполним чертёж:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{30}{50}\cdot 6=3{,}6$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{30}{50}\cdot 6\cdot\frac{44}{50}\cdot\frac{20}{49}\approx 1{,}3$$

Задача 47. На вступительных экзаменах встречаются задачи 20 типов. Абитуриент знает, как решить задачи 15 типов. В экзаменационный билет входят 7 задач разных типов. Для случайной величины X – числа решенных абитуриентом задач, составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения $F(x)$, нарисовать ее график, вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение: случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$p_x = \dfrac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, в данном случае:

$N = 20$ – всего различных типов задач;
$M = 15$ – количество типов задач, на которые студент знает ответ;
$n = 7$ – количество вопросов в экзаменационном билете;
$x = \{2,3,4,5,6,7\}$ – возможное число решенных абитуриентом задач.

$C_{20}^7 = \dfrac{20!}{13!\cdot 7!} = \dfrac{14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{5040} = 77520$ способами можно выбрать 7 экзаменационных вопросов.

2) $x = 2$

$$p_2 = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^5}{C_{20}^7} = \frac{105}{77520} = \frac{7}{5168} \approx 0{,}00136$$

3) $x = 3$

$$p_3 = \frac{C_{15}^3 \cdot C_5^4}{C_{20}^7} = \frac{455\cdot 5}{77520} = \frac{455}{15504} \approx 0{,}02935$$

4) $x = 4$

$$p_4 = \frac{C_{15}^4 \cdot C_5^3}{C_{20}^7} = \frac{1365\cdot 10}{77520} = \frac{455}{2584} \approx 0{,}17608$$

5) $x = 5$

$$p_5 = \frac{C_{15}^5 \cdot C_5^2}{C_{20}^7} = \frac{3003\cdot 10}{77520} = \frac{1001}{2584} \approx 0{,}38738$$

6) $x = 6$

$$p_6 = \frac{C_{15}^6 \cdot C_5^1}{C_{20}^7} = \frac{5005\cdot 5}{77520} = \frac{5005}{15504} \approx 0{,}32282$$

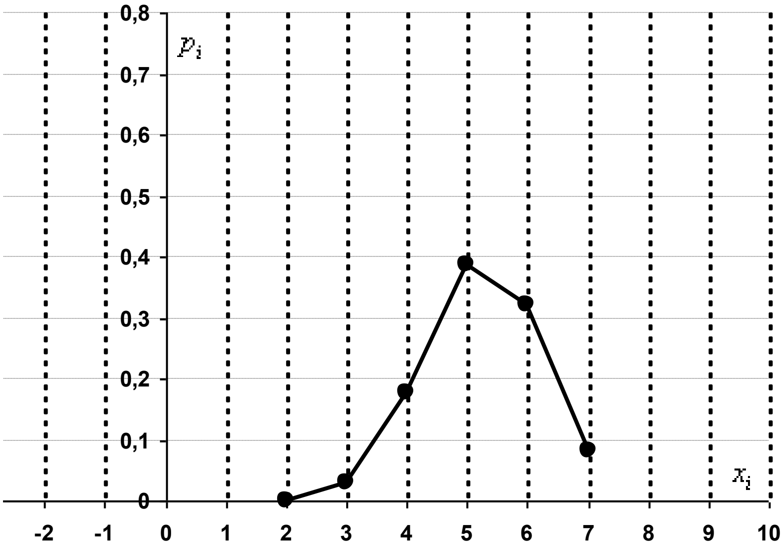
7) $x = 7$

$$p_7 = \frac{C_{15}^7 \cdot C_5^0}{C_{20}^7} = \frac{6435}{77520} = \frac{429}{5168} \approx 0{,}08301$$

Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X:

X	x_i	2	3	4	5	6	7	
	p_i	0,00136	0,02935	0,17608	0,38738	0,32282	0,08301	$\sum = 1$

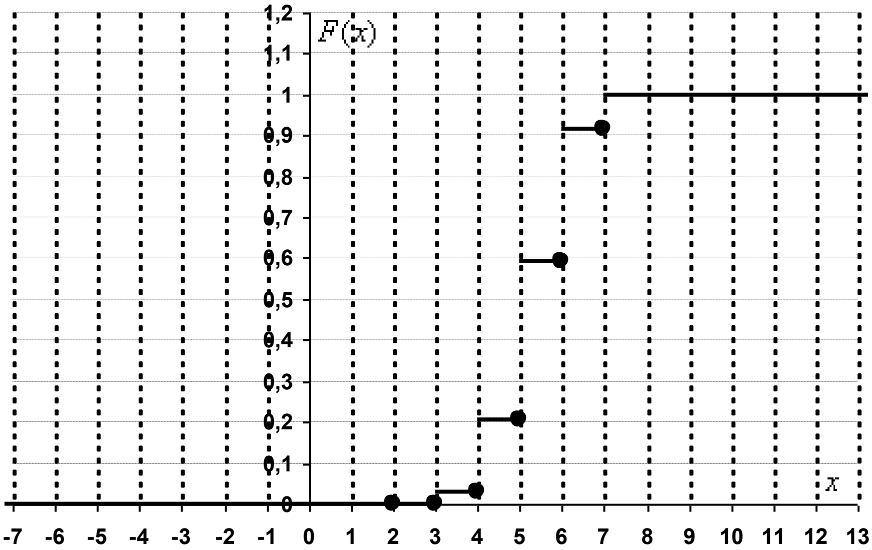
Построим многоугольник распределения:



Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 2; \\ 0{,}00136 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}03071 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 0{,}20679 \ \textit{при} \ 4 < x \le 5; \\ 0{,}59417 \ \textit{при} \ 5 < x \le 6; \\ 0{,}91699 \ \textit{при} \ 6 < x \le 7; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 7. \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X)=\frac{15}{20}\cdot 7=\frac{3}{4}\cdot 7=5{,}25$$

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{15}{20}\cdot 7\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{5}{19}=\frac{273}{304}\approx 0{,}898$$