Задачи финансовой математики

Задача 1. Найти $\alpha = 15\%$ от величины $S = 1800$

Решение: $S \cdot \frac{\alpha}{100} = S \cdot \frac{15}{100} = 1800 \cdot 0{,}15 = 270$ д.е. *(денежных единиц)*

Ответ: 270

Задача 2. Найти величину S, $\alpha = 10\%$ от которой равно $T = 900$

Решение: $S = \frac{T}{\frac{\alpha}{100}} = \frac{900}{0{,}1} = 9000$

Ответ: 9000

Задача 3. На вклад $S_0 = 20000$ в банке ежемесячно начисляется $\alpha = 2\%$, причём начисленные проценты не изымаются, а капитализируются. Во что превратится данный вклад через 5 месяцев?

Решение: используем формулу начисления сложных процентов: $S_n = S_0(1+i)^n$.

В данном случае: $i = \frac{\alpha}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$, $n = 5$ месяцев

Таким образом, сумма, накопленная через 5 месяцев:

$S_5 = 20000 \cdot (1+0{,}02)^5 = 20000 \cdot (1{,}02)^5 \approx 22081{,}62$ д.е. *(денежных единиц)*

Ответ: $\approx 22081{,}62$ д.е.

Задача 4. На вклад в банке ежемесячно начисляется $\alpha = 2\%$, причём начисленные проценты не изымаются, а капитализируются. Через сколько месяцев накопится сумма $S_n = 30000$, если первоначальный вклад составляет $S_0 = 20000$?

Решение: используем формулу начисления сложных процентов: $S_n = S_0(1+i)^n$.

В данном случае: $i = \frac{\alpha}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$, $S_0 = 20000$, $S_n = 30000$, $n = ?$

Таким образом:

$30000 = 20000 \cdot (1+0{,}02)^n$

$30000 = 20000 \cdot (1{,}02)^n$

$\frac{30000}{20000} = (1{,}02)^n$

$1{,}5 = (1{,}02)^n$

Логарифмируем обе части:
$\ln 1{,}5 = \ln(1{,}02)^n$
$\ln 1{,}5 = n \ln 1{,}02$

В результате:
$n = \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}02} \approx 20{,}5$ месяца

Ответ: $\approx 20{,}5$ месяца

Задача 5. Вкладчик намеревается воспользоваться годовой номинальной ставкой $\alpha = 15\%$ в предположении ежемесячной капитализации. Каким должен быть размер вклада S_0, чтобы через $n = 4$ месяца накопилось $S_4 = 100$ тыс. руб.

Решение: найдем ежемесячную ставку начисления: $\alpha_m = \dfrac{15\%}{12} = 1{,}5\%$ в месяц или $i_m = \dfrac{\alpha_m}{100} = \dfrac{1{,}5}{100} = 0{,}015$

Используем формулу сложных процентов: $S_n = S_0(1 + i_m)^n$
В данном случае: $n = 4$, $S_n = 100000$
Таким образом:
$100000 = S_0(1 + 0{,}015)^4$
$S_0 = \dfrac{100000}{(1{,}015)^4} \approx 94218{,}42$ рублей

Ответ: первоначальный вклад должен составлять $\approx 94218{,}42$ рублей

Задача 6. На депозитный вклад $S_0 = 10000$ руб. проводятся начисления по годовой номинальной ставке $\alpha = 12\%$. Какова разница доходов, которые были бы получены по схеме простых и сложных процентов через 18 месяцев? Изобразите полученные результаты графически при начислении процентов раз в квартал.

Решение: Всего $n = \dfrac{18}{3} = 6$ периодов начислений. Переведём проценты в доли единицы: $i = \dfrac{\alpha}{100} = \dfrac{12\%}{100\%} = 0{,}12$

Вычислим квартальную ставку начисления: $i_k = \dfrac{i}{4} = \dfrac{0{,}12}{4} = 0{,}03$.

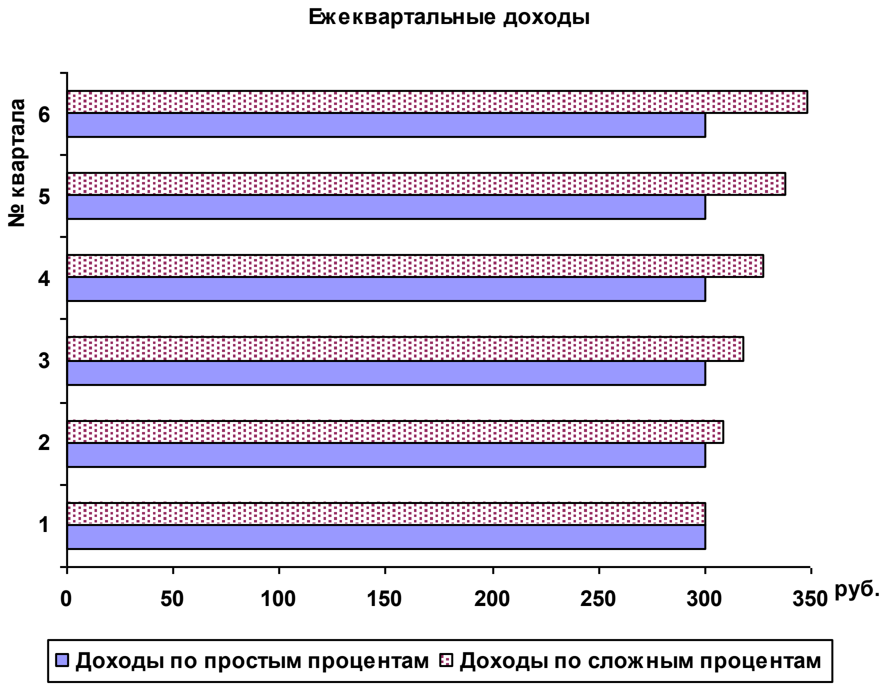
Найдем доход, полученный за 18 месяцев, по схеме простых процентов:
$d_p = S_0 \cdot 6 i_k = 10000 \cdot 6 \cdot 0{,}03 = 1800$ рублей.
Найдем доход, полученный за 18 месяцев, по схеме сложных процентов:
$d_s = S_0(1 + i_k)^n - S_0 = 10000 \cdot (1{,}03)^6 - 10000 \approx 1940{,}52$ рублей.

Найдем разницу доходов:
$d_s - d_p = 1940{,}52 \; - 1800 \; = 140{,}52$ рубля.

Рассчитаем поквартальные доходы по сложной ставке:

300,000	309,000	318,270	327,818	337,653	347,782	$\sum = 1940{,}52$

Изобразим полученные результаты графически:



Ответ: $d_s - d_p = 1940{,}52 \; - 1800 \; = 140{,}52$ рубля.

Задача 7. Пенсионный фонд инвестирует вклады в предприятие, дающее $\alpha = 15\%$ годовых. Клиент вносит в фонд ежегодно одинаковую сумму в течение 5 лет. Каким должен быть его ежегодный взнос, чтобы за 5 лет накопилась сумма в 1 миллион рублей?

Решение: пусть x – ежегодный взнос клиента.

Тогда $(1{,}15)^5 x, (1{,}15)^4 x, (1{,}15)^3 x, (1{,}15)^2 x, (1{,}15)x$ – суммы, начисленные по истечению пяти лет на 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й взносы соответственно.

По условию через пять лет должна накопиться сумма в 1 млн. руб.

Составим и решим уравнение:

$$(1{,}15)^5 x + (1{,}15)^4 x + (1{,}15)^3 x + (1{,}15)^2 x + (1{,}15)x = 1$$

$$1{,}15x \cdot \left(1 + 1{,}15 + (1{,}15)^2 + (1{,}15)^3 + (1{,}15)^4\right) = 1$$

Используем формулу для нахождения суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + g + g^2 + ... + g^n = \frac{b_1 \cdot \left(g^n - 1\right)}{g - 1}$$

В данном случае $b_1 = 1;\ g = 1{,}15;\ n = 5$

$$\frac{1{,}15x \cdot \left((1{,}15)^5 - 1\right)}{0{,}15} = 1$$

$x = \dfrac{0{,}15}{1{,}15 \cdot ((1{,}15)^5 - 1)} \approx 0{,}1289700$ млн. руб. или 128,97 тыс. руб. – ежегодный взнос клиента.

Ответ: $\approx 128{,}97$ тыс. руб.

Задача 8. Кредит в размере $K_0 = 1800$ у.е. был выдан в момент времени $t_0 = 1.03.99$ на срок год под $p = 40\%$ годовых и должен быть погашен частями актуарным способом. Поступили следующие платежи: в момент времени $t_1 = 01.08.99$ – в объеме $R_1 = 200$, в момент $t_2 = 01.11.99$ – в объеме $R_2 = 500$, в момент времени $t_3 = 01.05.00$ – в объеме $R_3 = 800$. Определить остаток долга на конец срока.

Решение: переведём проценты в доли единицы: $\dfrac{40\%}{100\%} = 0{,}4$.

Вычислим процентную ставку за первый период (5 месяцев):

$$p_1 = \frac{0{,}4}{12} \cdot 5 = 0{,}166667.$$

Долг к времени уплаты первого взноса: $1{,}166667 \cdot 1800 = 2100$.

Остаток долга после первой выплаты: $2100 - 200 = 1900$

Вычислим процентную ставку за второй период (3 месяца):

$$p_2 = \frac{0{,}4}{12} \cdot 3 = 0{,}1.$$

Долг ко времени уплаты второго взноса: $1{,}1 \cdot 1900 = 2090$.

Остаток долга после второй выплаты: $2090 - 500 = 1590$

Вычислим процентную ставку за третий период (6 месяцев):

$$p_3 = \frac{0{,}4}{12} \cdot 6 = 0{,}2.$$

Долг ко времени уплаты третьего взноса: $1{,}2 \cdot 1590 = 1908$.

Остаток долга после третьей выплаты: $1908 - 800 = 1108$

За оставшееся время до погашения кредита (4 месяца) на остаток будет начислено по ставке:

$$p_4 = \frac{0{,}4}{12} \cdot 4 = 0{,}133333$$

Таким образом, в конце срока нужно выплатить: $0{,}133333 \cdot 1108 = 1255{,}733$

Ответ: 1255,733 у.е.

Задача 9. Долг в 5 млн. руб., разделенный первоначально на три равные суммы со сроками уплаты через 6, 12 и 18 месяцев заменен консолидированным платежом с уплатой через 10 месяцев. Какая сумма подлежит выплате через 10 месяцев, если номинальная сложная годовая ставка $i = 0{,}32$.

Решение: найдем полугодовую процентную ставку $i_p = \frac{i}{2} = \frac{0{,}32}{2} = 0{,}16$

Разделим общий долг (заимствованная сумма + проценты) на 3 равные выплаты $\frac{5}{3} = 1{,}666667$млн. руб. и найдем сумму заимствованных средств.

В первом взносе проценты начислены на все 5 млн. рублей, таким образом, доля заимствованных средств в первой выплате: $1{,}666667 - 5\cdot 0{,}16 = 0{,}866667$ млн. руб.

Во втором взносе проценты начислены на остаток 3,333333 млн. рублей, таким образом, доля заимствованных средств во второй выплате:
$1{,}666667 - 3{,}333333\cdot 0{,}16 = 1{,}133333$ млн. руб.

В третьем взносе проценты начислены на остаток 1,666667 млн. рублей, таким образом, доля заимствованных средств в третьей выплате: $1{,}666667 - 1{,}666667 \cdot 0{,}16 = 1{,}4$ млн. руб.

Итого, заимствованная сумма: $0{,}866667 + 1{,}133333 + 1{,}4 = 3{,}4$ млн. руб.

Найдем начисленный долг по консолидированному платежу.

Процентная ставка на 10 месяцев: $i_{10} = \frac{10i}{12} = \frac{5\cdot 0{,}32}{6} = 0{,}266667$.

Таким образом, через 10 месяцев необходимо выплатить:
$3{,}4\cdot 1{,}266667 = 4{,}306667$ млн. руб.

Ответ: 4,306667 млн. руб.

Задача 10. Кредит в $K_0 = 15000$ ден. ед. был предоставлен на $n = 2$ года при ежемесячных капитализациях и по истечению срока был единожды погашен суммой в 22000 д.е. Найти сложные проценты ставки кредита: q (месячную) и p (годовую).

Решение: используем формулу для начисления сложных процентов:
$K_n = K_0(1+q)^m$

В данном случае:
$n = 24$ периода начисления процентов;
$K_0 = 15000$ – сумма кредита;
$K_{24} = 22000$ – сумма гашения кредита по истечению срока.

Таким образом:
$22000 = 15000\,(1+q)^{24}$
$(1+q)^{24} = 0{,}681818$
$1+q = \sqrt[24]{0{,}681818}$

$q = \sqrt[24]{0{,}681818} - 1 \approx 0{,}016086$ – ежемесячная ставка начисления.

Годовая процентная ставка:
$p \approx 0{,}016086 \cdot 12 \approx 0{,}193032$

Ответ: $q \approx 0{,}016086$ (примерно 1,61%), $p \approx 0{,}193032$ (примерно 19,3%)

Задача 11. Кредит в размере 30 млн. руб. получен на 10 месяцев с условием ежемесячного погашения долга постнумерандо равными платежами. Найдите сумму ежемесячного платежа R, общую выплату по кредиту и переплату в связи с заимствованием средств. Проценты начисляются каждый месяц по номинальной годовой ставке сложных процентов $i = 0{,}2$.

Решение: найдем ежемесячную ставку начисления: $i_m = \frac{i}{12} = \frac{0{,}2}{12} = 0{,}016667$.

Используем формулу $R = \frac{D}{\frac{1-(1+i_m)^{-n}}{i}}$, где R – ежемесячная сумма платежа, $D = 30$ млн. руб. – сумма займа, $n = 10$ – количество периодов начисления процентов.

Таким образом, ежемесячный платеж:

$$R = \frac{30}{\frac{1-(1{,}016667)^{-10}}{0{,}016667}} = \frac{30}{9{,}141283} = 3{,}281815 \text{ млн. руб.}$$

Общая выплата по кредиту:
$n \cdot R = 10 \cdot 3{,}281815 = 32{,}81821$ млн руб.

Переплата: $32{,}81821 - 30 = 2{,}81821$ млн. руб.

Ответ: $R = 3{,}281815$ млн. руб., общая выплата: 32,81815 млн. руб., переплата: 2,81815 млн. руб.

Задача 12. Какую номинальную стоимость должен вписать кредитор в вексель, выданный ему на $n = 130$ дней при учетной ставке $p = 0{,}14$ (14%) годовых, если заемщик просит в долг сумму в $K_0 = 300000$ д.е.

Решение: используем формулу банковского дисконтирования с той поправкой, что дисконт учитывается единожды за 130 дней:

$$K_0 = K_t(1 - tq)$$

В данном случае: $t = \frac{130}{365} = 0{,}356164$ доля года

Таким образом:

$K_t = \frac{K_0}{(1-tq)} = \frac{300000}{1-0{,}356164 \cdot 0{,}14} = 315743{,}9$ д.е. – сумма, которую кредитор должен вписать в вексель, который выдаёт ему заёмщик

Ответ: 315743,9 д.е.

Задача 13. Вексель на 1 млн. руб. погашен досрочно за $n=5$ месяцев по сложной номинальной ставке $d_c = i_c = 0{,}05$ (5%) – одинаковой для ежемесячного математического i_c и банковского d_c дисконтирования. Найдите разницу в величинах того и другого дисконтов.

Решение: найдем математический дисконт. Используем формулу:

$PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$, где FV – номинальная стоимость векселя, PV – реальный размер заёмных средств (стоимость с вычетом дисконта).

$$PV = \frac{1}{(1+0{,}05)^5} = 0{,}783526 \quad \text{млн. руб.}$$

Таким образом, математический дисконт:

$$m_d = FV - PV = 1 - 0{,}783526 = 0{,}216474 \quad \text{млн. руб.}$$

Найдем банковский дисконт. Используем формулу банковского дисконтирования:

$$PV = FV(1-d)^n = 1\cdot(1-0{,}05)^5 = (0{,}95)^5 = 0{,}773781$$

В результате:

$$b_d = FV - PV = 1 - 0{,}773781 = 0{,}226219 \quad \text{млн. руб.}$$

Разница в дисконтах: $b_d - m_d = 0{,}226219 - 0{,}216474 = 0{,}009745$

Вывод: кредитору (например, банку) выгоднее руководствоваться схемой банковского дисконтирования, поскольку при принятии векселя на 1 млн. от заёмщика в пользу кредитора удерживается на 9745 рублей больше, чем при математическом дисконтировании.

Ответ: $b_d - m_d = 0{,}009745$ млн. руб.

Задача 14. Решите обратную задачу: какую сложную учетную ставку d_c должен иметь выбранный заемщиком банк, если в нем можно получить кредит 90 тыс. руб. на $m=6$ месяцев. При этом на руки должна быть получена сумма не менее 50 тыс. руб.

Решение: используем формулу $PV = FV(1-d)^n$. В соответствии с условием задачи составляем и решаем неравенство относительно d:

$$50 \le 90(1-d)^6$$

$$(1-d)^6 \ge \frac{5}{9}$$

$$(1-d) \ge \sqrt[6]{\frac{5}{9}}$$

$$d \le 1 - \sqrt[6]{\frac{5}{9}} \approx 0{,}093319$$

Ответ: учётная ставка должна быть не более 9,33% в месяц