Горячие формулы школьного курса математики

Для успешного освоения высшей математики необходимо вспомнить следующее:

I) Модуль (абсолютное значение) числа

Грубо говоря, это число без учёта знака. Модуль «уничтожает» возможный знак «минуса»: $|4| = 4$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $\left|\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$, $|-2{,}5| = 2{,}5$ и т.д.

Таким образом, модуль произвольного числа x всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

Согласно школьному определению, модуль числа – это **расстояние** (а оно не может быть отрицательным) от соответствующей точки числовой прямой до начала координат. Из чего следует, что модули противоположных чисел равны, например: $|-4| = |4| = 4$. Действительно, числа –4 и 4 равноудалены от нуля.

Уравнение $|x| = \alpha$ имеет два корня: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$ (если $\alpha = 0$, то корень один).

Неравенство $|x| < \alpha$ раскрывается через двойное неравенство $-\alpha < x < \alpha$.

Неравенство $|x| > \alpha$ раскрывается через *совокупность* неравенств $\left[\begin{array}{l} x < -\alpha \\ x > \alpha \end{array}\right.$, то есть «икс» **либо** меньше $-\alpha$, **либо** больше α.

Аналогичные выкладки справедливы и для нестрогих неравенств $|x| \leq \alpha$, $|x| \geq \alpha$.

II) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

2) Квадрат суммы и квадрат разности

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) Сумма и разность кубов:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4) Куб суммы и разности

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Данные формулы очень часто используются в ходе решения пределов, преобразований подынтегральных выражений, действий с комплексными числами.

Формулы № 1-2 желательно знать наизусть и сразу ВИДЕТЬ возможность их применения.

III) Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$**,** $a\neq 0$

Без него далеко не уедешь. Вспоминаем, как решать.

Находим дискриминант:
$D=b^2-4ac$

1) Если $D>0$, то уравнение имеет два действительных корня:
$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ – обычно их располагают в порядке возрастания.

2) Если $D=0$, то уравнение имеет два совпавших действительных корня:
$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

3) Если $D<0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.
Подробная информация в статье «Комплексные числа для чайников»:
http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html

Практическим критерием правильности вычислений является тот факт, что у вас получился «хороший» дискриминант с извлечением корня нацело, например:
$D=16$ и $\sqrt{D}=\sqrt{16}=4$, а вот $D=17$ – не есть здОрово – скорее всего, вы допустили ошибку, либо в условии задачи опечатка. Хотя может так оно и должно быть.

Справедливо следующее разложение квадратного трехчлена на множители:
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Решение квадратного уравнения – одно из самых распространённых действий в ходе выполнения различных задач высшей математики.

IV) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на число c: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$	2) Число a делится на дробь $\frac{b}{c}$: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на дробь $\frac{c}{d}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

V) Действия со степенями

В качестве основания степени снова возьмем всеми любимую букву x. Надеюсь, что вы помните:

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, в частности: $\dfrac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Разумеется, правила работают и в обратном порядке.

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ. **В таком виде (правая часть) часто записываются радикалы (корни) в процессе нахождения производных, интегралов и т.д.**

Пример: $\dfrac{1}{\sqrt[7]{(x+\cos 3x)^4}} = \dfrac{1}{(x+\cos 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$

Все три выражения – это **одно и то же**, просто запись разная.

VI) Немного о логарифмах

Основное логарифмическое тождество $(a>0,\ a \neq 1,\ b>0)$:

$b = a^{\log_a b}$, в частности: $b = e^{\ln b}$

Некоторые **важные свойства** *(на примере натурального логарифма)*. Если $a>0, b>0$, то справедливо следующее (и слева направо, и справа налево):

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$\ln a^k = k\ln a$, где k – любое действительное число.

Несмотря на условие $a>0, b>0$, эти свойства можно применять при нахождении производных (с определённой тонкостью). Кроме того, есть обобщенные формулы для произвольных «а» и «б», они часто используются в ходе решения дифф. уравнений:

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$$

$$\ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

Если a может принимать отрицательные значения, а k - *чётное* число, то:

$\ln a^k = k\ln|a|$; если k равно иному значению, то модуль не нужен:

$$\ln a^k = k\ln a$$