Схема полного исследования функции $y = f(x)$

Методический материал систематизирует информацию
раздела «Функции и графики» сайта http://mathprofi.ru

I. Нахождение области определения, точек разрыва, области значения (опционально), исследование функции на чётность, нечётность, периодичность
а) Первый пункт – нахождение *области определения* $D(f)$ и *точек разрыва* функции. Полученный результат **крайне важен** для всех последующих этапов исследования, поскольку сразу отсеивает ненужные промежутки – те, на которых вообще нет графика функции. Чаще всего область определения лежит на поверхности, в более же трудных случаях приходится решать систему неравенств. На практике следует обращать внимание на знаменатель, корень чётной степени, логарифм и некоторые другие функции. б) *Область значений* $E(f)$ очевидна только в самых простых случаях. Обычно она проясняется на последующих рубежах исследования, где о ней и уместнее сделать запись. Пункт опционален, в принципе, его отсутствие не критично. в) Исследование функции на *чётность / нечётность* состоит в проверке условий $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ соответственно. Если функция чётна, то её график симметричен относительно оси OY, если нечётна – относительно начала координат. Чётность или нечётность функции спасает от многих ошибок исследования и уменьшает количество вычислений в 2 раза. г) Функция *периодична*, если выполнено равенство $f(x+T) = f(x)$. Число T называют *периодом* функции. Простейший пример: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, значит, функция $f(x) = \sin x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$. Периодическую функцию достаточно исследовать на одном периоде. Большинство встречающихся в задачах функций *не являются чётными, нечётными или периодическими*, и это тоже необходимо закомментировать в исследовании. Подробная информация по теме: http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html http://mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html
II. Асимптоты графика функции, поведение функции на бесконечности
а) В точках бесконечного разрыва функции, как правило, существуют *вертикальные асимптоты* графика. Их наличие устанавливается с помощью вычисления односторонних пределов в вышеуказанных точках. б) *Наклонная асимптота* графика задаётся уравнением $y = kx + b$, коэффициенты которого разыскиваются как решение пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$. Если **хотя бы один** из пределов бесконечен, то наклонная асимптота отсутствует. Частный случай: *горизонтальная асимптота* $y = b$ определяется конечным пределом $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. У некоторых функций может быть *две различных* наклонных асимптоты либо одна асимптота слева или справа. В этом случае «плюс» и «минус» бесконечности рассматриваются отдельно.

в) Поведение функции на бесконечности определяется пределами $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, и если предел бесконечен (тот или иной), то функция *не ограничена* снизу (когда предел равен $-\infty$) либо сверху (когда он $=+\infty$). Конечный предел, как отмечалось, детектирует горизонтальную асимптоту. Данный пункт исследования тоже опционален, и его отсутствие не смертельно.

Полученные результаты дают важную информацию о расположении графика функции.

Статьи по теме:

http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html

http://mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html

III. Нахождение точек пересечения графика с координатными осями

и интервалов знакопостоянства функции

Чтобы найти точку пересечения графика с осью ординат, нужно вычислить значение $y = f(0)$.

Чтобы найти точки пересечения графика с осью абсцисс *(нули функции)*, нужно решить уравнение $f(x)=0$. Далее на числовой прямой откладываются *точки разрыва, нули функции* (если они существуют) и на интервалах, которые входят в область определения, выясняются знаки функции. Для этого обычно используют *метод интервалов*. В простых случаях можно обойтись без чертежа и записать только аналитические выводы. Найденные *интервалы знакопостоянства* говорят нам о том, где график функции расположен **выше** оси OX ($f(x)>0$), а где – **ниже** данной оси ($f(x)<0$).

Когда нахождение нулей функции трудоёмко и технически затруднено, рассмотренный пункт целесообразно полностью пропустить.

Подробная информация по теме:

http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html

IV. Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции

Интервалы возрастания / убывания и наличие *минимумов / максимумов* исследуются с помощью первой производной. На первом шаге необходимо найти *критические точки*. К ним относятся корни уравнения $f'(x)=0$, и те значения, в которых функция $y=f(x)$ определена, но её производной не существует. На втором шаге следует проверка *достаточного условия экстремума*. На числовой прямой откладываются точки разрыва функции (если они существуют) и критические точки (если они есть). *Методом интервалов* определяются знаки **производной** на интервалах, которые входят в область определения самой функции.

Если $f'(x)>0$ на интервале, то функция $y=f(x)$ *возрастает* на данном интервале;

если $f'(x)<0$ на интервале, то функция $y=f(x)$ *убывает* на данном интервале.

Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «–», то функция $y=f(x)$ достигает *максимума* в данной точке; если с «–» на «+» – то *минимума*.

В простейшей версии задания достаточно ограничиться нахождением производной

и выводом, что, например, $f'(x)<0$ на всей области определения $y=f(x)$, следовательно, функция убывает на ней.

Подробная информация по теме:

http://mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html

V. Исследование выпуклости, вогнутости и перегибов графика

Интервалы *выпуклости*, *вогнутости* и *точки перегиба* графика устанавливаются с помощью второй производной функции. Алгоритм аналогичен предыдущему пункту: дифференцируется первая производная и решается уравнение $f''(x)=0$. Помимо корней, к критическим точкам необходимо отнести те значения, в которых сама функция $y=f(x)$ определена, но её второй производной не существует.

Выполнено ли *достаточное условие перегиба*? На числовой прямой отмечаются точки разрыва функции и критические точки 2-й производной (если таковые вообще существуют). *Методом интервалов* определяются знаки **2-й производной** на интервалах, которые входят в область определения самой функции.

Если $f''(x)>0$ на интервале, то график функции $y=f(x)$ *вогнут (выпукл вниз)* на данном интервале; если $f''(x)<0$ – то *выпукл (выпукл вверх)*. Если при переходе через критическую точку 2-я производная меняет знак, значит, здесь *точка перегиба* графика функции $y=f(x)$.

В элементарном случае, когда, скажем, график вогнут на всей области определения, достаточно просто отметить, что $f''(x)>0$ и сделать соответствующий вывод.

Подробная информация по теме:

http://mathprofi.ru/vypuklost_vognutost_tochki_peregiba_grafika.html

VI. Нахождение дополнительных точек и построение графика

В большинстве примеров для самоконтроля и более точного построения графика нужно найти дополнительные точки. Чертёж удобнее выполнять на клетчатой бумаге, при этом **целесообразно придерживаться следующего порядка**:

– правильно изобразить систему координат;

– начертить асимптоты (если они есть);

– отметить все точки, найденные в ходе исследования;

– аккуратно соединить точки, то есть изобразить сам график;

– выполнить необходимые подписи.

График должен отражать все свои принципиальные особенности, найденные в ходе исследования, в частности, *характерные точки*:

– пересечения с осями координат;

– максимумов / минимумов;

– перегибов.

(они могут быть в разном количестве и «комплектации», а иногда вовсе отсутствовать)

! Помните, ПРАВИЛЬНЫЙ чертёж – краеугольный камень задания! В ходе проверки рецензент посмотрит именно на график (а скорее, и только на него ;-)), чтобы быстро обнаружить изъяны самого исследования.

Подробная информация по теме:

http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html

VII. На завершающем этапе сдаём своё произведение искусства на проверку =)