Пример 4

Найти частные производные первого порядка функции $z = e^x(\cos y + x\sin y)$. Проверить, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. Записать полный дифференциал первого порядка dz.

Решение:
1) Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(e^x(\cos y + x\sin y)\right)'_x = (e^x)'_x(\cos y + x\sin y) + e^x(\cos y + x\sin y)'_x =$$
$$= e^x(\cos y + x\sin y) + e^x(0 + 1\cdot\sin y) = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y)$$

$$z'_y = \left(e^x(\cos y + x\sin y)\right)'_y = e^x(\cos y + x\sin y)'_y = e^x(-\sin y + x\cos y).$$

2) Найдем смешанные производные второго порядка:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(e^x(\cos y + \sin y + x\sin y)\right)'_y = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y)'_y =$$
$$= e^x(-\sin y + \cos y + x\cos y)$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(e^x(-\sin y + x\cos y)\right)'_x = (e^x)'_x(-\sin y + x\cos y) + e^x(-\sin y + x\cos y)'_x =$$
$$= e^x(-\sin y + x\cos y) + e^x(-0 + 1\cdot\cos y) = e^x(-\sin y + \cos y + x\cos y)$$

$z''_{xy} = z''_{yx}$, значит, все вычисления выполнены верно.

3) Составим полный дифференциал первого порядка:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \left[e^x(\cos y + \sin y + x\sin y)\right]dx + \left[e^x(-\sin y + x\cos y)\right]dy$$

Пример 8

Найти частные производные первого порядка функции
$z(x, y) = \dfrac{y}{\sin y} + \sqrt{x}\ln x + \cos(2x + 2y)$.

Решение:

$$z'_x = \left(\frac{y}{\sin y} + \sqrt{x}\ln x + \cos(2x + 2y)\right)'_x = \left(\frac{y}{\sin y}\right)'_x + \left(\sqrt{x}\ln x\right)'_x + \left(\cos(2x + 2y)\right)'_x =$$
$$= 0 + \left(\sqrt{x}\right)'_x \cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot\left(\ln x\right)'_x - \sin(2x + 2y)\cdot(2x + 2y)'_x =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} - \sin(2x + 2y)\cdot(2 + 0) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sin(2x + 2y)$$

$$z'_y=\left(\frac{y}{\sin y}+\sqrt{x}\ln x+\cos(2x+2y)\right)'_y=\left(\frac{y}{\sin y}\right)'_y+\left(\sqrt{x}\ln x\right)'_y+\left(\cos(2x+2y)\right)'_y=$$

$$=\frac{(y)'_y\sin y-y(\sin y)'_y}{\sin^2 y}+0-\sin(2x+2y)\cdot(2x+2y)'_y=$$

$$=\frac{1\cdot\sin y-y\cdot\cos y}{\sin^2 y}-\sin(2x+2y)\cdot(0+2)=\frac{\sin y-y\cos y}{\sin^2 y}-2\sin(2x+2y)$$

Пример 9

Дана функция двух переменных $z=\arcsin\frac{y}{x^2}$. Найти все частные производные первого и второго порядков.

Решение: Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x=\left(\arcsin\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}\cdot y\left(x^{-2}\right)'_x=$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot y\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^3}=-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}$$

$$z'_y=\left(\arcsin\frac{y}{x^2}\right)'_y=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y=\frac{x^2}{\sqrt{x^4-y^2}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_x=-2y\left(\left(x^6-x^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^6-x^2y^2\right)'_x=$$

$$=-2y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^6-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^6-x^2y^2\right)'_x=\frac{y}{\sqrt{(x^6-x^2y^2)^3}}\cdot\left(6x^5-2xy^2\right)=$$

$$=\frac{y}{x^3\sqrt{(x^4-y^2)^3}}\cdot 2x\left(3x^4-y^2\right)=\frac{2y(3x^4-y^2)}{x^2\cdot\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=\left(\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y=-\frac{1}{2}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^4-y^2\right)'_y=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}}\cdot\left(0-2y\right)=\frac{y}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

Найдем смешанные производные второго порядка:

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=-\frac{2}{x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_y=-\frac{2}{x}\cdot\frac{(y)'_y\sqrt{x^4-y^2}-y\cdot\left(\sqrt{x^4-y^2}\right)'_y}{\left(\sqrt{x^4-y^2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{2}{x}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^4-y^2}-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^4-y^2}}\left(x^4-y^2\right)'_y}{x^4-y^2}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-y^2}-\frac{y(0-2y)}{2\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2}=$$

$$=-\frac{2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^4-y^2}}}{x^4-y^2}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4-y^2+y^2}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}=-\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}=\frac{-2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)'_x=\left(\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=-\frac{1}{2}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^4-y^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{(x^4-y^2)^3}}\cdot\left(4x^3-0\right)=\frac{-2x^3}{\sqrt{(x^4-y^2)^3}}$$