Как найти ранг матрицы с параметром?

В этом файле представлены дополнительные задачи по теме Ранг матрицы, не вошедшие в основной урок. А именно, речь пойдёт о матрицах, которые содержат параметр. Если вам будет что-то не понятно по терминам, обозначениям, сути, то сначала пройдите базовое занятие *(ссылка выше)*. Ну а мы начинаем, точнее говоря, продолжаем:

Пример 8

При каких значениях параметров ранг матрицы равен: 0) нулю, 1) единице, 2) двум?

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta-1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Решение: **0)** Ранг матрицы равен нулю, если она *нулевая*, то есть **все** её элементы – нули:

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha^2=0 \\ 2\beta=0 \\ \beta-1=0 \end{cases}$$

Очевидно, что эта система *несовместна*, т. к. не может быть такого, что $\beta=0$, и в то же самое время $\beta=1$. Таким образом, **ранг матрицы не равен нулю** ни при каких значениях параметров. То есть в матрице при любых раскладах будет *хотя бы одно* отличное от нуля число, напрашиваются примеры $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ для $\alpha=0, \beta=0$ и $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для $\alpha=0, \beta=1$

1) Ранг матрицы равен единице, если:

– *хотя бы один* минор 1-го порядка отличен от нуля, это следует из предыдущего пункта.

– **все** миноры более высоких порядков равны нулю, у нас таковой один:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta-1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\beta(\beta-1) = 0$$

Таким образом, ранг матрицы равен одному, если параметры связаны отношением:

$$\alpha^3 = 2\beta(\beta-1) \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{2\beta(\beta-1)}$$

Тривиальные примеры есть в предыдущем пункте, и давайте что-нибудь поинтереснее: если $\beta=2$, то $\alpha=\sqrt[3]{2\cdot2\cdot1}=\sqrt[3]{4}$. И в самом деле, подставляя эти значения параметров:

$$\begin{vmatrix} \sqrt[3]{4} & 4 \\ 1 & \sqrt[3]{4^2} \end{vmatrix} = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2} - 1\cdot4 = \sqrt[3]{4^3} - 4 = 0$$ – получаем ноль.

2) Ранг матрицы равен двум, если $\begin{vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta-1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\beta(\beta-1) \neq 0$

Ответ: 1) ни при каких, **2)** если $\alpha=\sqrt[3]{2\beta(\beta-1)}$, **3)** при остальных значениях.

Пример 9

При каком значении параметра ранг матрицы равен двум?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ p & -2 & -6 \\ 1 & p & 15 \end{pmatrix}$$

Решение: ранг матрицы равен двум, если:

1) существует *хотя бы один* минор 2-го порядка, отличный от нуля;

2) **все** миноры более высоких порядков равны нулю.

Проверяем первый пункт. У матрицы «три на три» существует девять миноров второго порядка, которые я подробно расписал в частности на уроке о методе обратной матрицы. И в глаза сразу бросается минор, который не содержит параметра «пэ»:

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ – однако он равен нулю. Но существует ещё один «чисто» числовой минор:

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 3 = 27 \neq 0$, таким образом, отличный от нуля минор нашёлся.

Следует заметить, что проверку первого условия можно выполнить **далеко не всегда сразу**. Так, если **все** миноры 2-го порядка содержат параметр, то мы не можем немедленно доказать или опровергнуть это условие. Или же оказалось, что все «числовые» миноры равны нулю. В этих случаях проверку лучше начать со второго пункта.

Проверяем пункт второй. Все миноры более высоких порядков должны равняться нулю. У нас такой минор один, третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ p & -2 & -6 \\ 1 & p & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель раскроем по первой строке:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ p & 15 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & -6 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} p & -2 \\ 1 & p \end{vmatrix} = 0$$

$$2(-30 + 6p) - (15p + 6) + 3(p^2 + 2) = 0$$

$$-60 + 12p - 15p - 6 + 3p^2 + 6 = 0$$

$$3p^2 - 3p - 60 = 0$$

$$p^2 - p - 20 = 0$$

И, решая квадратное уравнение, получаем корни $p_1 = -4,\ p_2 = 5$, после чего не помешает выполнить **проверку**, а именно последовательно подставить найденные значения в матрицу, вычислить определители и убедиться, что они равны нулю.

Ответ: при $p = -4$ и при $p = 5$.

Задание для самостоятельного решения, с хлёсткой буквой «лямбда»:

Пример 10

Определить ранг матрицы при различных значениях параметра

$$\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -1 \\ 2\lambda & \lambda & 10 \\ -1 & -2\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

Технически решение можно оформить по-разному, и совсем молодец тот, кто вспомнит свойства определителей ;) Образец для сверки в конце файла.

И следующий очень интересный пример прислал один из посетителей сайта, вопрос тот же, но матрица покруче:

Пример 11

Определить ранг матрицы при различных значениях параметра

$$\begin{pmatrix} a-1 & a-1 & a(a-1) \\ 2a-3 & 3a-5 & a^2-2 \\ -1 & a-3 & 4a-5 \end{pmatrix}$$

Решение: почти все элементы матрицы содержат параметр, и анализировать миноры с «шашкой наголо» уже как-то не хочется. Поэтому упростим её с помощью *элементарных преобразований*, которые, напоминаю, **не меняют ранг матрицы**. Прежде всего, выбираем строку или столбец, где проще всего получить два нуля. В нашем примере это, очевидно, первая строка. Изучая метод Гаусса и применяя его на уроке Ранг матрицы, мы проводили элементарные преобразования строк, здесь же работаем со столбцами.

Ко 2-му столбцу прибавим 1-й, умноженный на (–1),
к 3-му столбцу прибавим 1-й, умноженный на $(-a)$,
распишу эти действия подробно:

$$\begin{pmatrix} a-1 & a-1 & a(a-1) \\ 2a-3 & 3a-5 & a^2-2 \\ -1 & a-3 & 4a-5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-1 & a-1-(a-1) & a(a-1)-a(a-1) \\ 2a-3 & 3a-5-(2a-3) & a^2-2-a(2a-3) \\ -1 & a-3+1 & 4a-5+a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 2a-3 & a-2 & -a^2+3a-2 \\ -1 & a-2 & 5a-5 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Если трудно воспринимаются столбцы, то транспонируйте исходную матрицу *(ранг не изменится)* и проведите эти действия со строками. В результате получена эквивалентная матрица (*), и исследование выгодно начать с минора третьего порядка, а именно случая, когда он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 2a-3 & a-2 & -a^2+3a-2 \\ -1 & a-2 & 5a-5 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель раскроем по первой строке:

$$(a-1)\cdot\begin{vmatrix} a-2 & -a^2+3a-2 \\ a-2 & 5a-5 \end{vmatrix}=0$$

Пользуясь свойством определителя, вынесем $a-2$ из 1-го столбца:

$$(a-1)(a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -a^2+3a-2 \\ 1 & 5a-5 \end{vmatrix}=0$$

$$(a-1)(a-2)(5a-5-(-a^2+3a-2))=0$$

$$(a-1)(a-2)(a^2+2a-3)=0$$

и, решив соответствующее квадратное уравнение, разложим трёхчлен на множители:

$$(a-1)(a-2)(a-1)(a+3)=0$$

$$(a+3)(a-1)^2(a-2)=0$$

Таким образом, минор третьего порядка равен нулю при $a=-3,\ a=1$ и $a=2$. Разберём эти случаи по порядку.

1) Подставим $a=-3$ в матрицу (*):

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -20 \\ -1 & -5 & -20 \end{pmatrix}$$

В принципе, матрицу можно допилить с помощью элементарных преобразований (привести к ступенчатому виду), но легче сразу отыскать минор второго порядка, отличный от нуля: $M_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -20 \end{vmatrix}=-4\cdot(-20)-(-1)\cdot 0=80\neq 0$

Таким образом, при $a=-3$ ранг матрицы равен **двум**.

2) Подставим $a=1$ в матрицу (*):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ *(удалили нулевую строку и одинаковую)*.

В результате получена *матрица-строка*, которая считается ступенчатой; коль скоро в ней есть ненулевые элементы, то ранг матрицы равен **единице**.

3) Подставим $a=2$ в матрицу (*):

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, и здесь существует минор $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=5\neq 0$, поэтому ранг равен **двум**.

Ответ: при $a=1$ ранг матрицы равен **единице**, при $a=-3$, $a=2$ – **двум**, при остальных значениях параметра – **трём**.

Для самостоятельного решения:

Пример 12

При каких значениях параметров ранг матрицы равен двум?

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ -14 & -7 & p & q \end{pmatrix}$$

Возможно, у вас сложилось впечатление, что в задачах такого типа матрицы непременно должны быть квадратными. Это, конечно же, не так:

Пример 13

Определить ранг матрицы при различных значениях параметра

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

Здесь удобно использовать следующую схему: сначала привести матрицу к ступенчатому виду, а затем рассмотреть все возможные матрицы третьего порядка. Можно и прямо проанализировать ступенчатую матрицу, что значительно короче, но это требует аккуратности и учёта всех возможных случаев. Образцы для сверки ниже, и, разумеется, ваши решения вряд ли совпадут с ними «один в один».

Спасибо за внимание и до скорых встреч!

Пример 10. Решение*: все миноры второго порядка содержат параметр, поэтому исследование удобно начать со старшего минора, приравняв его к нулю:*

$$\begin{vmatrix} \lambda & 5\lambda & -1 \\ 2\lambda & \lambda & 10 \\ -1 & -2\lambda & -3 \end{vmatrix} = 0$$

По свойству определителя, вынесем «лямбду» из 2-го столбца:

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 5 & -1 \\ 2\lambda & 1 & 10 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

и, взяв заметку корень $\lambda_1 = 0$*, разложим определитель по 3-й строке:*

$$-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2\lambda & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 5 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(50+1) + 2(10\lambda + 2\lambda) - 3(\lambda - 10\lambda) = 0$$

$$-51 + 24\lambda + 27\lambda = 0$$

$51\lambda = 51$*, получая ещё один корень:* $\lambda_2 = 1$

1) Подставим $\lambda = \lambda_1 = 0$ в матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Здесь существует ненулевой минор 2-го порядка, отличный от нуля, в частности:
$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$*, следовательно, ранг матрицы равен двум.*

2) Подставим $\lambda = \lambda_2 = 1$ в матрицу:

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *(полезно убедиться, что определитель равен нулю).*

Аналогично, $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 20 \neq 0$*, поэтому ранг матрицы тоже равен двум.*

***Ответ**: при $\lambda = 0, \lambda = 1$ ранг матрицы равен двум, при остальных значениях – трём.*

***Пример 12. Решение**: с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к ступенчатому виду:*

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ -14 & -7 & p & q \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ -14 & -7 & p & q \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ 0 & 28 & p+14 & q+28 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ 0 & 28 & p+14 & q+28 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -14 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & p & q+16 \end{pmatrix}$$

(1) 1-ю и 2-ю строки поменяли местами.

(2) Ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на 2; к 4-й строке 1-ю, умноженную на -7.

(3) 2-я и 3-я строки одинаковы, одну из них удаляем.

(4) К 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 2.

Ранг матрицы равен двум только в том случае, если 3-я строка нулевая (тогда, соответственно, её удаляем, и остаётся ступенчатая матрица, содержащая 2 строки).

Стало быть $p = 0,\ q + 16 = 0$.

***Ответ**: при* $p = 0,\ q = -16$

***Примечание**: в иных случаях, ранг, очевидно, равен трём.*

Пример 13. Решение*: с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к ступенчатому виду:*

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^2 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^2 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1+k-k^2-k^3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(1) 1-ю и 3-ю строки поменяли местами (это самый выгодный вариант).

(2) Ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на (–1); к 3-й – 1-ю, умноженную на $(-k)$.

(3) К 3-й строке прибавили 2-ю.

Рассмотрим все возможные матрицы «три на три» и проанализируем соответствующие миноры третьего порядка, приравнивая их к нулю.

1) *Матрица, составленная из первых трёх столбцов матрицы (*), и соответствующий минор 3-го порядка:*

$$M_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (k-1)(2-k-k^2) = 0$$

Решив квадратное уравнение, разложим на множители квадратный трёхчлен:

$$1 \cdot (k-1)(1-k)(2+k) = 0,$$

таким образом, получаем два корня: $k_1 = -2$, $k_2 = 1$

Подставим $k = k_1 = -2$ *в матрицу (*):*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *– полученная матрица имеет ступенчатый вид и содержит три строки, поэтому ранг равен* ***трём****.*

Подставим $k = k_2 = 1$ *в матрицу (*):*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, таким образом, ранг равен* ***единице****.*

2) *Составим матрицу из 1, 2 и 4-го столбцов матрицы (*), соответствующий минор:*

$$M_{124} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k^2 \\ 0 & k-1 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 1+k-k^2-k^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (k-1)(1+k-k^2-k^3) = 0$$

Разложим кубический многочлен на множители:

$$1+k-k^2-k^3=1-k^2+k-k^3=1-k^2+k(1-k^2)=(1+k)(1-k^2)=(1+k)(1+k)(1-k)$$

Таким образом, получаем:

$$(k-1)(1+k)(1+k)(1-k)=0$$

Значение $k=k_2=1$ *уже рассмотрено, проверяем* $k=k_3=-1$ *– подставим в матрицу (*):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ *– полученная матрица имеет ступенчатый вид и содержит три строки, поэтому ранг равен* ***трём****.*

3) *Составим матрицу из 1, 3 и 4-го столбцов матрицы (*), соответствующий минор:*

$$M_{134}=\begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k^2 & 1+k-k^2-k^3 \end{vmatrix}=0$$

$$(1-k)(1+k-k^2-k^3)-(1-k^2)(k-k^2)=0$$
$$(1-k)(1+k)(1+k)(1-k)-(1+k)(1-k)k(1-k)=0$$
$$(1+k)(1-k)(1-k)\cdot[1+k-k]=0$$
$$(1+k)(1-k)(1-k)=0$$

Все корни уже рассмотрены.

4) *Составим матрицу из 2, 3 и 4-го столбцов матрицы (*):*

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k-1 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k^2 & 1+k-k^2-k^3 \end{pmatrix}$$

Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на $1-k$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k+k(1-k) & k-k^2+k^2(1-k) \\ 0 & 1-k^2 & 1+k-k^2-k^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^3 \\ 0 & 1-k^2 & 1+k-k^2-k^3 \end{pmatrix}$$

К 3-й строке прибавим 2-ю, умноженную на (–1):

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^3 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

Приравняем к нулю соответствующий минор:

$$M_{234}=\begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^3 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{vmatrix}=0$$

$$1\cdot(1-k^2)(1-k^2)=0$$

– все корни уже рассмотрены.

Ответ*: ранг равен единице при* $k=1$*, в остальных случаях – трём.*

Второй способ решения *(после того, как получили матрицу (*)):*

Поскольку 1-я строка матрицы (*) содержит ненулевые элементы, то ранг ***не меньше единицы****. Ранг матрицы меньше трёх если:*

1) 1-я строка пропорциональна 2-й или / и 3-й строке. В нашем случае это невозможно т. к. слева вверху единица (константа), а под ней – нули

2) 2-я и 3-я строки пропорциональны. Это возможно только в том случае, если ведущий элемент 2-й строки (тот, который на «ступеньке») равен нулю: $k-1=0 \Rightarrow k=1$ *– подставим в матрицу (*):*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, таким образом, ранг равен* ***единице****.*

3) Если нулевой будет либо 2-я строка, либо 3-я, либо 2-я и 3-я одновременно.

Вторая строка будет нулевой при условии $\begin{cases} k-1=0 \\ 1-k=0 \\ k-k^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \\ 1-k=0 \\ k(1-k)=0 \end{cases}$*. Данная система совместна и имеет единственное решение* $k=1$ *– этот случай только что рассмотрен.*

Третья строка будет нулевой при условии $\begin{cases} 2-k-k^2=0 \\ 1+k-k^2-k^3=0 \end{cases}$*. Квадратный трёхчлен разлОжим на множители, решив соответствующее квадратное уравнение, кубический многочлен – с помощью перегруппировки слагаемых:*

$$1+k-k^2-k^3=1-k^2+k-k^3=1-k^2+k(1-k^2)=(1+k)(1-k^2)=(1+k)(1+k)(1-k)$$

Таким образом, система принимает вид:

$\begin{cases} (1-k)(2+k)=0 \\ (1+k)(1+k)(1-k)=0 \end{cases}$ *– система совместна и имеет то же единственное решение* $k=1$.

Случай, когда и 2-я и 3-я строки нулевые получился в пункте 2. Но, не помешает заметить, что две рассмотренные выше системы имеют общее решение $k=1$.

Ответ*: ранг равен единице при* $k=1$*, в остальных случаях – трём.*