# Ряды Фурье повышенной сложности

В данном файле содержатся дополнительные примеры с решениями, которые не вошли в основной урок http://mathprofi.ru/ryady_furie_primery_reshenij.html

Каждая задача снабжена кратким содержательным комментарием.

Пример 8

Разложить функцию в ряд Фурье

$f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi;\pi)$

Это обещанное классическое разложение параболы, которое можно найти практически в любом учебнике по теме.

**Решение**: В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Функция $f(x)=x^2$ является чётной, а значит, раскладывается в ряд Фурье только по косинусам: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3\pi}\left(x^3\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3\pi}\cdot(\pi^3-0)=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx$

$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

$$(*)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi n}(0-0)-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=(*)$$

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx$

$$(*)=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{4}{\pi n^2}(\pi\cos\pi n-0)-\frac{4}{\pi n^3}(\sin nx)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\cdot\pi\cdot(-1)^n-\frac{4}{\pi n^3}(0-0)=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

Таким образом: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos nx\right]$

**Ответ**: $f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right]$

Пример 9

Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\pi$ ) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1; & x\in[-\pi;0]\\ x+2; & x\in(0;\pi]\end{cases}$$

Техническая сложность данного примера состоит в нахождении коэффициентов $a_n, b_n$. Формула интегрирования по частям используется дважды одновременно.

**Решение**: в данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Разложим функцию в ряд Фурье: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2x-1)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)dx=\frac{1}{\pi}(x^2-x)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-(\pi^2+\pi)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+2\pi\right)=-\pi-1+\frac{\pi}{2}+2=1-\frac{\pi}{2}=\frac{2-\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2x-1)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)\cos nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=2x-1\Rightarrow du=2dx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx$

$u=x+2\Rightarrow du=dx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(2x-1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+2)\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos 0-\cos(-\pi n))+\frac{1}{\pi n^2}(\cos(\pi n)-\cos 0)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2x-1)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)\sin nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=2x-1\Rightarrow du=2dx$ $\qquad$ $u=x+2\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx$ $\qquad$ $dv=\sin nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx$

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(2x-1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+2)\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(-1-(-2\pi-1)\cos(-\pi n)\right)+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi n}\left((\pi+2)\cos(\pi n)-2\right)+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(-1+(2\pi+1)(-1)^n\right)+\frac{2}{\pi n^2}(0-0)-\frac{1}{\pi n}\left((\pi+2)(-1)^n-2\right)+\frac{1}{\pi n^2}(0-0)=$$

$$=\frac{1-(2\pi+1)(-1)^n-(\pi+2)(-1)^n+2}{\pi n}=\frac{3+(-2\pi-1-\pi-2)(-1)^n}{\pi n}=$$

$$=\frac{3-(3\pi+3)(-1)^n}{\pi n}=3\cdot\frac{1-(\pi+1)(-1)^n}{\pi n}$$

**Ответ**: $f(x)\sim\frac{2-\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+3\cdot\frac{(1-(\pi+1)(-1)^n)}{\pi n}\sin nx\right]$

<u>Пример 10</u>

Разложить функцию в ряд Фурье

$$f(x)=\begin{cases}x;\ 0\le x\le 1\\ x-1;\ 1<x\le 2\end{cases}$$

Разложение по нетривиальному промежутку $[0;\,2]$. Как и в предыдущем примере, возникает техническая сложность при вычислении коэффициентов $a_n,b_n$

**Решение**: В данной задаче период разложения $T=2$, полупериод $l=1$.

«Поправим» формулы на «нестандартность» интервала и вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}(x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^1 x\cos\pi nxdx+\int_1^2(x-1)\cos\pi nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

| | |
|---|---|
| $u=x\Rightarrow du=dx$<br>$dv=\cos\pi nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx$<br>$\int_a^b udv=uv\Big\vert_a^b-\int_a^b vdu$ | $u=x-1\Rightarrow du=dx$<br>$dv=\cos\pi nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx$<br>$\int_a^b udv=uv\Big\vert_a^b-\int_a^b vdu$ |

$$(*)=\frac{1}{\pi n}x\sin\pi nx\Big|_0^1-\frac{1}{\pi n}\int_0^1\sin\pi nxdx+\frac{1}{\pi n}(x-1)\sin\pi nx\Big|_1^2-\frac{1}{\pi n}\int_1^2\sin\pi nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\right)\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\right)\cos\pi nx\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)+\frac{1}{\pi^2n^2}(\cos 2\pi n-\cos\pi n)=\frac{(-1)^n-1+1-(-1)^n}{\pi^2n^2}=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^1 x\sin\pi nxdx+\int_1^2(x-1)\sin\pi nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

| | |
|---|---|
| $u=x\Rightarrow du=dx$<br>$dv=\sin\pi nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx$ | $u=x-1\Rightarrow du=dx$<br>$dv=\sin\pi nxdx\Rightarrow v=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx$ |

$$(*)=-\frac{1}{\pi n}x\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos\pi nxdx-\frac{1}{\pi n}(x-1)\cos\pi nx\Big|_1^2+\frac{1}{\pi n}\int_1^2\cos\pi nxdx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(\cos\pi n-0)+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1-\frac{1}{\pi n}(\cos 2\pi n-0)+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_1^2=$$

$$=\frac{-\cos\pi n}{\pi n}+\frac{1}{\pi^2n^2}(0-0)-\frac{\cos 2\pi n}{\pi n}+\frac{1}{\pi^2n^2}(0-0)=\frac{-(-1)^n-1}{\pi n}=-\frac{((-1)^n+1)}{\pi n}$$

Искомое разложение имеет вид: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right]$

**Ответ**: $f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n+1)\sin\pi nx}{n}$

Пример 11

$f(x)=|x+1|$, $x\in(-\pi;\pi)$

После раскрытия модуля выясняется, что на интервале разложения функция хоть и непрерывна, но кусочна. Следовательно, каждый коэффициент Фурье придётся представить в виде суммы двух интегралов.

**Решение**: В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Раскроем модуль:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1),\ x\in(-\pi;-1)\\ x+1,\ x\in(-1;\pi)\end{cases}$$

Разложим функцию в ряд Фурье: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)dx=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\pi}^{-1}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}-1-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{2}-\pi+\frac{\pi^2}{2}+\pi+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2+1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)\cos nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x+1\Rightarrow du=dx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx$

$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

$$(*)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{-1}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-1}\sin nxdx\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-1}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-1}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(0-0)+\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{-1}+\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-1}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}(\cos n-(-1)^n)+\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-\cos n)=\frac{-\cos n+(-1)^n+(-1)^n-\cos n}{\pi n^2}=\frac{2((-1)^n-\cos n)}{\pi n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-1}(x+1)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\pi}(x+1)\sin nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin nx dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$(*) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{-1} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-1}\cos nx dx\right) + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-1}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-1}^{\pi}\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}(0-(1-\pi)(-1)^n) - \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{-1} - \frac{1}{\pi n}((\pi+1)(-1)^n - 0) + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-1}^{\pi} =$$

$$= \frac{(\pi-1)(-1)^n}{\pi n} - \frac{1}{\pi n^2}(-\sin n - 0) - \frac{(\pi+1)(-1)^n}{\pi n} + \frac{1}{\pi n^2}(0+\sin n) =$$

$$= \frac{(\pi-1-\pi-1)(-1)^n}{\pi n} + \frac{2\sin n}{\pi n^2} = \frac{-2(-1)^n}{\pi n} + \frac{2\sin n}{\pi n^2} =$$

$$= \frac{-2n\cdot(-1)^n + 2\sin n}{\pi n^2} = \frac{2(\sin n - n\cdot(-1)^n)}{\pi n^2}$$

Таким образом:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2+1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2((-1)^n - \cos n)}{\pi n^2}\cdot\cos nx + \frac{2(\sin n - n\cdot(-1)^n)}{\pi n^2}\cdot\sin nx\right]$$

**Ответ**: $f(x) \sim \frac{\pi^2+1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n - \cos n)\cdot\cos nx + (\sin n - n\cdot(-1)^n)\cdot\sin nx}{n^2}\right]$

<u>Пример 12</u>

Разложить в ряд Фурье по синусам
$f(x) = \cos 3x$, $x \in (0;\pi)$

Задача отличается тем, что коэффициенты $b_1$, $b_2$, $b_3$ нужно вычислить непосредственным интегрированием, а общий коэффициент $b_n$ найти для номеров $n \geq 4$

**Решение**: так как функцию требуется разложить в ряд Фурье по синусам, продолжим её на симметричный интервал нечётным образом:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos 3x, & x \in (-\pi;0) \\ \cos 3x, & x \in (0;\pi) \end{cases}$$

В данной задаче период разложения $T = 2\pi$, полупериод $l = \pi$.

Искомое разложение имеет вид: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

Вычислим коэффициент Фурье:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 3x \cdot \sin nx dx = (*)$$

Используем тригонометрическую формулу:
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$(*) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin(nx+3x)+\sin(nx-3x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(x(n+3))+\sin(x(n-3)))dx$$

Вычислим коэффициенты $b_1$, $b_2$, $b_3$ непосредственным интегрированием:

1) Если $n=1$, то: $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin 4x+\sin(-2x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin 4x - \sin 2x)dx =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cos 4x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{4\pi}(1-1)+\frac{1}{2\pi}(1-1) = 0$$

2) Если $n=2$, то: $b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin 5x+\sin(-x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin 5x - \sin x)dx =$

$$= -\frac{1}{5\pi}\cos 5x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{5\pi}(-1-1)+\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{5\pi}-\frac{2}{\pi} = \frac{2-10}{5\pi} = -\frac{8}{5\pi}$$

3) Если $n=3$, то: $b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin 6x+\sin 0)dx = -\frac{1}{6\pi}\cos 6x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{6\pi}(1-1) = 0$

4) При $n\ge 4$ справедливо неравенство $n-3>0$, а значит, сумма синусов $\sin(x(n+3))+\sin(x(n-3))$ будет именно суммой, а, не разностью (как в пунктах №№1,2) и не одиночным синусом (как в пункте №3)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(x(n+3))+\sin(x(n-3)))dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n+3)}\cos(x(n+3))\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi(n-3)}\cos(x(n-3))\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n+3)}(\cos(\pi(n+3))-\cos 0) - \frac{1}{\pi(n-3)}(\cos(\pi(n-3))-\cos 0) =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n+3)}((-1)^{n+1}-1) - \frac{1}{\pi(n-3)}((-1)^{n+1}-1) = -\frac{((-1)^{n+1}-1)}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{(n+3)}+\frac{1}{(n-3)}\right) =$$

$$= \frac{(1-(-1)^{n+1})}{\pi}\cdot\left(\frac{n-3+n+3}{(n+3)(n-3)}\right) = \frac{(1+(-1)^n)}{\pi}\cdot\frac{2n}{(n+3)(n-3)} = \frac{2n\cdot(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-9)}$$

Таким образом:
$$f(x) \sim b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \sum_{n=4}^{\infty} b_n\sin nx = 0 - \frac{8}{5\pi}\sin 2x + 0 + \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2n\cdot(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-9)}\cdot\sin nx\right)$$

**Ответ**: $f(x) \sim -\frac{8}{5\pi}\sin 2x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n\cdot(1+(-1)^n)}{(n^2-9)}\cdot\sin nx\right)$

Пример 13

Разложить в ряд Фурье по синусам

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right) \\ 3-x,\ x\in\left(\dfrac{3}{2};3\right) \end{cases}$$

Очень интересный пример, в котором кусочно-заданная функция непрерывна на интервале $(0;3)$, и в ходе разложения она отображается на интервал $(-3;0)$ нечётным образом (график симметричен относительно начала координат). Коэффициент $b_n$ выражается через сумму двух интегралов.

**Решение**: в данной задаче период разложения $T=6$, полупериод $l=3$.

Разложим функцию в ряд Фурье по синусам: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}$

Вычислим коэффициент Фурье:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx+\frac{2}{3}\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx$$

1) $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^{3/2}x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=(*)$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi nx}{3}dx\Rightarrow v=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2\pi n}\right)\cos\frac{2\pi nx}{3}=-\frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=-\frac{1}{\pi n}x\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^{3/2}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{3/2}\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(\frac{3}{2}(-1)^n-0\right)+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{3}{2\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^{3/2}=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cdot(0-0)=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}$$

2) $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{3/2}^{3}(3-x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=(*)$

Интегрируем по частям:

$u=3-x\Rightarrow du=-dx$

$dv=\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi nx}{3}dx\Rightarrow v=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2\pi n}\right)\cos\frac{2\pi nx}{3}=-\frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}$

$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

$$(*)=-\frac{1}{\pi n}(3-x)\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_{3/2}^{3}-\frac{1}{\pi n}\int_{3/2}^{3}\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(0-\frac{3}{2}(-1)^n\right)-\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{3}{2\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_{3/2}^{3}=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}-\frac{3}{2\pi^2n^2}\cdot(0-0)=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}$$

Таким образом: $b_n=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}+\frac{3(-1)^n}{2\pi n}=2\cdot\frac{3(-1)^n}{2\pi n}=\frac{3(-1)^n}{\pi n}$

В результате: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}$

**Ответ**: $f(x)\sim\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2\pi nx}{3}$

## Пример 14

Разложить в ряд Фурье по косинусам

$$f(x)=\frac{\pi-x}{4},\ x\in(0;\pi)$$

Стандартный пример чётного разложения линейной функции

**Решение**: В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Разложим функцию в ряд Фурье по косинусам (чётным образом): $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(\pi-x)^2\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{4\pi}(0-\pi^2)=\frac{\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot\cos nxdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=\pi-x\Rightarrow du=-dx$

$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx$

$$(*)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi-x)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{2\pi n}(0-0)+\frac{1}{2\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2\pi n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=-\frac{((-1)^n-1)}{2\pi n^2}=\frac{(1-(-1)^n)}{2\pi n^2}$$

Таким образом: $f(x)\sim\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-(-1)^n)}{2\pi n^2}\cos nx\right]$

**Ответ**: $f(x)\sim\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cdot\cos nx\right]$

Пример 15

Разложить в ряд Фурье по косинусам

$f(x)=x\sin x,\ x\in(0;\pi)$

Задание похоже на Пример 12, коэффициент $a_1$ нужно вычислить непосредственным интегрированием. Повышенная сложность вычислений.

**Решение**: В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Разложим функцию в ряд Фурье по косинусам: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=-\frac{2}{\pi}\cdot(x\cos x)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos xdx=-\frac{2}{\pi}\cdot(-\pi-0)+\frac{2}{\pi}\sin x\Big|_0^{\pi}=2+\frac{2}{\pi}(0-0)=2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cdot\cos nxdx=(*)$$

Используем тригонометрическую формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$$(*)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x(\sin(x+nx)+\sin(x-nx))dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin((1+n)x)+\sin((1-n)x))dx$$

**I)** Если $n=1$, то второй синус обнуляется:

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin((1+1)x)+\sin((1-1)x))dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin 2x+0)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin 2xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin 2xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}vdu$

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos 2xdx\right)=-\frac{1}{2\pi}(\pi-0)+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(\sin 2x)\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}(0-0)=-\frac{1}{2}$$

**II**) Для всех номеров $n\geq 2$ справедливо неравенство $1-n<0$, поэтому:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin((1+n)x)+\sin((1-n)x))dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin((1+n)x)-\sin((n-1)x))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin((1+n)x)dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin((n-1)x)dx=(*)$$

Интегралы удобно вычислить по отдельности:

1) $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin((1+n)x)dx=(**)$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin((1+n)x)dx\Rightarrow v=-\frac{1}{1+n}\cos((1+n)x)$

$\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}vdu$

$$(**)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}\cdot x\cos((1+n)x)\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{1+n}\int_{0}^{\pi}\cos((1+n)x)dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi(1+n)}\cdot(\pi\cos((1+n)\pi)-0)+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n}\cdot\frac{1}{1+n}\cdot\sin((1+n)x)\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{\pi\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(1+n)}+\frac{1}{\pi(1+n)^2}\cdot(0-0)=\frac{(-1)^n}{1+n}$$

2) $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin((n-1)x)dx = (**)$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin((n-1)x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)$

$$(**) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n-1}\cdot x\cos((n-1)x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n-1}\int\limits_0^{\pi}\cos((n-1)x)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n-1)}\cdot(\pi\cos((n-1)\pi) - 0) + \frac{1}{\pi(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-1)}\cdot\sin((n-1)x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n-1)} + \frac{1}{\pi(n-1)^2}\cdot(0-0) = \frac{(-1)^n}{(n-1)}$$

Таким образом:

$$(*) = \frac{(-1)^n}{(1+n)} - \frac{(-1)^n}{(n-1)} = (-1)^n\cdot\left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n-1}\right) = (-1)^n\cdot\frac{n-1-1-n}{(1+n)(n-1)} = \frac{-2\cdot(-1)^n}{n^2-1}$$

В результате:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{2}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-2\cdot(-1)^n}{n^2-1}\cdot\cos nx\right]$$

**Ответ**: $f(x) \sim 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cdot\cos nx\right]$