

Сборник задач на классическое определение вероятности

Задача 1. В лотерее разыгрывается $n = 3$ книги. Всего в урне $N = 50$ билетов. Первый подошедший к урне вынимает билет. Найти вероятность того, что билет окажется выигрышным.

Решение: Рассмотрим событие:

A – первый подошедший извлек выигрышный билет.

По классическому определению вероятностей:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{50} = 0,06 \text{ – искомая вероятность.}$$

Ответ: $P(A) = 0,06$

Задача 2. Секретный замок содержит 15 дисков. Каждый диск имеет десять цифр от 0 до 9. Какова вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр?

Решение: определим общее количество исходов:

$C_{10}^1 = 10$ способами можно набрать цифру на каждом из 15 дисков.

$(C_{10}^1)^{15} = 10^{15}$ способами можно набрать цифры на замке.

Верная комбинация цифр – одна (количество благоприятствующих исходов).

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{1}{10^{15}} \text{ – вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр.}$$

Ответ: $p = \frac{1}{10^{15}}$

Задача 3. Брошено 8 игральных костей. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Решение: Найдём общее число исходов:

$(C_6^1)^8 = 6^8$ способами могут выпасть цифры на 8 игральных костях.

Благоприятствующих исходов: 6 (одинаковые цифры на выпавших гранях всех костей)

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{6}{6^8} = \frac{1}{6^7} \approx 0,000004 \text{ – вероятность того, что на всех выпавших гранях появится}$$

одинаковое число очков.

Ответ: $p = \frac{1}{6^7} \approx 0,000004$

Задача 4. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001

Решение: найдем общее число исходов:

Всего существует $10^5 - 1 = 99999$ облигаций с различными пятизначными номерами (исключаем номер 00000).

Найдем количество благоприятствующих исходов:

$$A_{10}^5 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240 \text{ номеров с различными цифрами.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{30240}{99999} \approx 0,302 \text{ – вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не}$$

содержит одинаковых цифр.

Ответ: $\approx 0,302$

Задача 5. Какова вероятность угадать кодовый трехзначный номер, если он состоит: а) из четных цифр, причем цифры в числе не повторяются; б) из цифр, больших 5, причем цифры в числе могут повторяться

Решение:

а) Найдем общее количество исходов.

Всего четных цифр – пять (0, 2, 4, 6, 8)

$A_5^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способами можно выбрать трёхзначный номер, который состоит из 5 четных цифр и цифры в нем не повторяются.

По классическому определению:

$$p = \frac{1}{60} \approx 0,0167 \text{ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.}$$

б) Найдем общее количество исходов.

Всего подходящих цифр – четыре (6, 7, 8, 9).

$A_{4(повт)}^3 = 4^3 = 64$ способами можно выбрать трехзначный номер, который состоит из цифр, больших 5, причем цифры в числе могут повторяться.

По классическому определению:

$$\bar{p} = \frac{1}{64} \approx 0,0156 \text{ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.}$$

Ответ: а) $\frac{1}{60} \approx 0,0167$, б) $\frac{1}{64} \approx 0,0156$

Задача 6. Телефонный номер состоит из 7 цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры различны.

Решение: Найдем общее число исходов:

$$A_{10(нов)}^7 = 10^7 \text{ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр.}$$

Найдём количество благоприятствующих исходов:

$A_{10}^7 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 604800$ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр, в котором все цифры различны.

По классическому определению:

$$p = \frac{A_{10}^7}{A_{10(нов)}^7} = \frac{604800}{10^7} = 0,06048 \text{ – вероятность того, что в данном телефонном}$$

номере все цифры различны.

Ответ: $p = 0,06048$

Задача 7. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и не содержат цифры 3. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: Найдем общее число исходов.

Всего: $10^2 = 100$ возможных номеров.

Исключаем номера, содержащие в двух последних разрядах цифру 3:

03, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93,

30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39

Итого: 19 номеров.

Также исключаем номера с двумя одинаковыми последними цифрами:
00, 11, 22, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (номер 33 уже учтен) – итого 9 номеров.

Таким образом, общее число исходов: $100 - 19 - 9 = 72$

Благоприятствующий исход – один (правильный номер).

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{1}{72} \text{ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер}$$

Ответ: $p = \frac{1}{72} \approx 0,014$

Задача 8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и первая цифра больше второй. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: Найдем общее число исходов:

Возможная предпоследняя цифра номера:	Возможные последние цифры:	Количество исходов:
1	0	1
2	0, 1	2
3	0, 1, 2	3
4	0, 1, 2, 3	4
5	0, 1, 2, 3, 4	5
6	0, 1, 2, 3, 4, 5	6
7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	7
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8
9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	9

Всего: 45 возможных исходов.

Благоприятствующий исход – один.

По классическому определению:

$$p = \frac{1}{45} \text{ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер}$$

Ответ: $p = \frac{1}{45} \approx 0,022$

Задача 9. Из цифр 0, 1, 3, 5, 7 составлено пятизначное число. Найти вероятность того, что оно делится на 5.

Решение: Считаем, что цифры не могут повторяться. Найдем общее количество возможных чисел:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ способами можно переставить 5 чисел по пяти разрядам.}$$

Исключаем $4! = 24$ случаев – когда ноль находится в старшем разряде и, соответственно, число является не пяти, а четырехразрядным.

Таким образом:

$$5! - 4! = 120 - 24 = 96 \text{ пятиразрядных чисел можно составить из данных цифр.}$$

Найдем количество чисел, кратных пяти. Число делится на 5, если в младшем разряде находится пятерка либо ноль.

Пусть число заканчивается на 0. Тогда $4! = 24$ способами можно переставить 4 остальные цифры в старших разрядах

Пусть число заканчивается на 5. Аналогично, существует 24 числа, но следует исключить $3! = 6$ случаев, когда ноль на первом месте. Таким образом, искомое количество чисел: $24 - 6 = 18$.

$$\text{Всего чисел, кратных пяти: } 24 + 18 = 42$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{42}{96} = \frac{7}{16} \text{ – вероятность того, что наудачу составленное из данных цифр число}$$

делится на 5.

Ответ: $p = \frac{7}{16} = 0,4375$

Задача 10. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 7 до 10 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:

7 очков: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)

8 очков: (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)

9 очков: (3,6), (6,3), (4,5), (5,4)

10 очков: (4,6), (6,4), (5,5)

Всего: 18 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$$p = \frac{18}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ — искомая вероятность.}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 11. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 2 до 8 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:

2 очка: (1,1)

3 очка: (1,2), (2,1)

4 очка: (1,3), (3,1), (2,2)

5 очков: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)

6 очков: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)

7 очков: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)

8 очков: (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)

Всего: 26 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$$p = \frac{26}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \text{ — искомая вероятность.}$$

Ответ: $\frac{13}{18}$

Примечание: здесь более рационально перечислить исходы, соответствующие противоположному событию (выпадение 9, 10, 11 или 12 очков)

Задача 12. Брошены две игральные кости. Что вероятнее: выпадение в произведении 6 или 12 очков?

Решение: общее число исходов: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 6:

(1,6), (6,1), (2,3), (3,2) – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:

$$P_6 = \frac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \text{ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 6.}$$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 12:

(2,6), (6,2), (3,4), (4,3) – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:

$$P_{12} = \frac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \text{ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 12.}$$

$$P_6 = P_{12}$$

Ответ: данные события равновероятны.

Задача 13. Бросаются три игральных кубика. Найти вероятности событий:

A – на всех кубиках выпало одинаковое число очков;

B – на всех кубиках в сумме выпало три очка;

C – на всех кубиках в сумме выпало более трех очков.

Решение: найдем общее число исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может упасть каждый кубик;

$C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ комбинаций цифр может выпасть при одновременном броске трех кубиков.

Событию *A* соответствует шесть благоприятствующих исходов:

(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)

По классическому определению вероятности:

$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ – вероятность того, что на всех кубиках выпало одинаковое число очков.

Событию *B* соответствует единственный благоприятствующий исход: (1,1,1)

По классическому определению вероятности:

$$P(B) = \frac{1}{216} \text{ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме выпало три очка.}$$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216} \text{ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме}$$

выпало более трех очков.

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{1}{36}, P(B) = \frac{1}{216}, P(C) = \frac{215}{216}$$

Задача 14. В коробке 7 красных и 5 синих карандашей. Наудачу взяли три карандаша. Найти вероятность того, что среди выбранных карандашей – ровно 2 красных и 1 синий.

Решение: Всего: $7 + 5 = 12$ карандашей в коробке.

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220 \text{ способами можно извлечь 3 карандаша из коробки.}$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ способом можно извлечь два красных карандаша.}$$

$$C_5^1 = 5 \text{ способами можно извлечь один синий карандаш.}$$

$$C_7^2 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105 \text{ способами можно извлечь искомую комбинацию карандашей.}$$

$$\text{По классическому определению: } p = \frac{C_7^2 \cdot C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44} \approx 0,4773 \text{ – вероятность}$$

того, что будут извлечены 2 красных и 1 синий карандаш.

$$\text{Ответ: } \frac{21}{44} \approx 0,4773$$

Задача 15. В коробке находятся 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Одновременно извлекают 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 2 синих и 2 красных.

Решение: всего: $3 + 4 + 3 = 10$ карандашей в коробке.

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{24} = 210 \text{ способами можно извлечь 6 карандашей из коробки.}$$

$$C_3^2 = 3 \text{ способами можно извлечь 2 синих карандаша.}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ способами можно извлечь 2 красных карандаша.}$$

$$C_3^2 = 3 \text{ способами можно извлечь 2 зеленых карандаша.}$$

$$C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 6 \cdot 3 = 54 \text{ способами можно извлечь искомый набор карандашей.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{54}{210} = \frac{9}{35} \text{ – вероятность того, что среди извлеченных 6}$$

карандашей окажется 2 синих и 2 красных.

$$\text{Ответ: } \frac{9}{35} \approx 0,2571$$

Задача 16. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1 и 4 детали – заводом № 2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Решение: всего: $16 + 4 = 20$ деталей.

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190 \text{ способами можно выбрать две детали.}$$

$$C_4^2 = 6 \text{ способами можно выбрать две детали, изготовленных заводом № 2.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95} \text{ – вероятность того, что выбраны 2 детали, изготовленные}$$

заводом № 2.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{95} = \frac{92}{95} \text{ – вероятность того, что среди двух выбранных деталей будет}$$

хотя бы одна, изготовленная заводом № 1.

Ответ: $\frac{92}{95} \approx 0,9684$

Задача 17. На сборку поступило десять деталей, среди которых четыре бракованные. Сборщик наудачу берёт три детали. Найти вероятности событий:

A – все детали бракованные;

B – только одна деталь из трёх бракованная;

C – хотя бы одна из взятых деталей бракованная.

Решение: найдём общее число исходов:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120 \text{ способами можно выбрать 3 детали из 10.}$$

а) $C_4^3 = 4$ способами можно выбрать 3 бракованные детали.

По классическому определению:

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \text{ – вероятность того, что все три детали будут бракованными.}$$

б) $C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну бракованную деталь.

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ способами можно выбрать 2 стандартные детали.}$$

$$C_4^1 \cdot C_6^2 = 4 \cdot 15 = 60 \text{ способами можно выбрать искомую комбинацию деталей.}$$

По классическому определению:

$$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \text{ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей}$$

только одна будет бракованной.

$$\text{в) } C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20 \text{ способами можно извлечь 3 стандартные детали.}$$

По классическому определению:

$$P(\bar{C}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \text{ – вероятность того, что все три извлечённые детали будут}$$

стандартными.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей}$$

хотя бы одна будет бракованной.

$$\text{Ответ: а) } P(A) = \frac{1}{30} \approx 0,0333, \quad \text{б) } P(B) = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \text{в) } P(C) = \frac{5}{6} \approx 0,8333$$

Задача 18. Из колоды в 36 карт наугад выбирают три карты. Найти вероятность того, что среди извлечённых трёх карт будет ровно 2 туза.

Решение:

$$C_{36}^3 = \frac{36!}{33!3!} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{6} = 7140 \text{ способами можно извлечь 3 карты из колоды.}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ способами можно извлечь двух тузов.}$$

$$C_{32}^1 = 32 \text{ способами можно извлечь одну другую карту.}$$

$$C_4^2 \cdot C_{32}^1 = 6 \cdot 32 = 192 \text{ способами можно извлечь искомую комбинацию карт.}$$

По классическому определению:

$$p = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{192}{7140} = \frac{16}{595} \approx 0,0269 \text{ – вероятность того, что среди трёх извлеченных}$$

карт будет ровно два туза.

$$\text{Ответ: } \frac{16}{595} \approx 0,0269$$

Задача 19. Из колоды в 32 карты извлекают сразу три карты. Найти вероятность того, что эти карты будут дамой, семеркой и тузом.

Решение:

$$C_{32}^3 = \frac{32!}{29!3!} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{6} = 4960 \text{ способами можно выбрать 3 карты из колоды.}$$

$$C_4^1 = 4 \text{ способами можно выбрать одну даму;}$$

$$C_4^1 = 4 \text{ способами можно выбрать одну семерку;}$$

$$C_4^1 = 4 \text{ способами можно выбрать одного туза;}$$

$$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ способами можно выбрать искомую комбинацию карт.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{32}^3} = \frac{64}{4960} = \frac{2}{155} - \text{вероятность того, что из колоды будут извлечены}$$

дама, семерка и туз.

$$\text{Ответ: } p = \frac{2}{155} \approx 0,013$$

Задача 20. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Решение:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252 \text{ способами можно выбрать 5 вагонов из десяти.}$$

$$C_2^2 = 1 \text{ способом можно выбрать вагоны с номерами 2 и 5.}$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56 \text{ способами можно выбрать 3 других вагона.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{1 \cdot 56}{252} = \frac{2}{9} \approx 0,2222 - \text{вероятность того, среди пяти выбранных для}$$

контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5

$$\text{Ответ: } \frac{2}{9} \approx 0,2222$$

Задача 21. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные

Решение: всего: $15 + 5 = 20$ магазинов в городе.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140 \text{ способами можно выбрать 3 магазина для}$$

приватизации.

$$C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ способами можно выбрать 3 непродовольственных магазинов}$$

для приватизации.

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114} \approx 0,0088 - \text{вероятность того, что все три выбранных магазина}$$

будут непродовольственными.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{114} \approx 0,0088$$

Задача 22. По делу проходят 50 фигурантов. Из них 15 являются свидетелями. Имеется возможность опросить 10 человек. Какова вероятность того, что среди опрошенных лиц окажется 5 свидетелей.

Решение:

$C_{50}^{10} = \frac{50!}{40!10!} = \frac{41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 10272278170$ способами можно выбрать 10 человек из 50.

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{10!5!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{120} = 3003 \text{ способами можно выбрать 5 свидетелей из 15.}$$

$C_{35}^5 = \frac{35!}{30!5!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{120} = 324632$ способами можно выбрать 5 других фигурантов из 35.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{15}^5 \cdot C_{35}^5}{C_{50}^{10}} = \frac{3003 \cdot 324632}{10272278170} \approx 0,0949$ – вероятность того, что среди 10 человек окажутся ровно 5 свидетелей.

Ответ: $p \approx 0,0949$

Задача 23. В партии сотовых телефонов, состоящих из 4 неисправных и 16 исправных, для проверки выбирают три. Найти вероятность того, что только два исправны.

Решение: Всего: $4 + 16 = 20$ телефонов в партии.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140 \text{ способами можно выбрать 3 телефона.}$$

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14!2!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120 \text{ способами можно выбрать два исправных телефона.}$$

$$C_4^1 = 4 \text{ способами можно выбрать 1 неисправный телефон.}$$

$$C_{16}^2 \cdot C_4^1 = 120 \cdot 4 = 480 \text{ способами можно выбрать искомую комбинацию телефонов.}$$

По классическому определению:

$p = \frac{C_{16}^2 \cdot C_4^1}{C_{20}^3} = \frac{480}{1140} = \frac{8}{19} \approx 0,4211$ – вероятность того, что из трех выбранных телефонов исправными являются только два.

Ответ: $\frac{8}{19} \approx 0,4211$

Задача 24. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся:

- а) только женские шубы;
- б) только мужские или только женские шубы.

Решение: всего: $10 + 6 = 16$ шуб в магазине.

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{13! \cdot 3!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{6} = 560 \text{ способами можно выбрать 3 шубы.}$$

$$\text{а) } C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120 \text{ способами можно выбрать 3 женские шубы.}$$

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{120}{560} = \frac{3}{14} \approx 0,2143 - \text{вероятность того, что среди трёх отобранных шуб}$$

окажутся только женские шубы.

$$\text{б) } C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20 \text{ способами можно выбрать 3 мужские шубы.}$$

$C_{10}^3 + C_6^3 = 120 + 20 = 140$ способами можно выбрать только мужские или только женские шубы.

По классическому определению вероятности:

$$p^* = \frac{C_{10}^3 + C_6^3}{C_{16}^3} = \frac{140}{560} = \frac{1}{4} = 0,25 - \text{вероятность того, что среди трёх отобранных шуб}$$

окажутся только женские шубы или только мужские шубы.

$$\text{Ответ: а) } \frac{3}{14} \approx 0,2143 \quad \text{б) } \frac{1}{4} = 0,25$$

Задача 25. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что он ответит на три вопроса билета?

Решение:

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300 \text{ способами можно выбрать 3 вопроса из 25;}$$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140 \text{ способами можно выбрать 3 вопроса из 20, на}$$

которые студент знает ответ.

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{1140}{2300} = \frac{57}{115} \approx 0,5 - \text{вероятность того, что студент ответит на три вопроса}$$

билета.

$$\text{Ответ: } p = \frac{57}{115} \approx 0,5$$

Задача 26. Готовясь к экзамену, студент не успел выучить 15 вопросов из 45. Какова вероятность того, что он вытащит билет, в котором не знает 1 вопрос, если всего в билете 4 вопроса?

Решение: найдём общее число исходов:

$$C_{45}^4 = \frac{45!}{4! \cdot 4!} = \frac{42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{24} = 148995 \text{ способами можно выбрать 4 вопроса из 45.}$$

Найдём благоприятствующее число исходов:

$C_{15}^1 = 15$ способами можно выбрать один вопрос, на который студент не знает ответа.

$C_{30}^3 = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{6} = 4060$ способами можно выбрать 3 вопроса, на которые студент знает ответ.

$C_{15}^1 \cdot C_{30}^3 = 15 \cdot 4060 = 60900$ способами можно выбрать искомую комбинацию вопросов.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{15}^1 \cdot C_{30}^3}{C_{45}^4} = \frac{60900}{148995} = \frac{580}{1419} \text{ – вероятность того, что студент вытащит билет, в}$$

котором не знает ответа на 1 вопрос из 4.

$$\text{Ответ: } p = \frac{580}{1419} \approx 0,41$$

Задача 27. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Решение: найдём общее число исходов:

$$n! = 8! = 40320 \text{ способами можно расставить 8 книг на одной полке.}$$

Без учёта перестановок 2 определенные книги могут оказаться рядом в 7 случаях, с учётом перестановок этих 2 книг – в 14 случаях.

Для каждого из 14 случаев оставшиеся шесть книг можно расставить $6! = 720$ способами. Поэтому существует $14 \cdot 6! = 14 \cdot 720 = 10080$ благоприятствующих комбинаций – когда две определённые книги оказываются рядом.

По классическому определению:

$$p = \frac{10080}{40320} = \frac{1}{4} \text{ – вероятность того, что две определенные книги окажутся}$$

поставленными рядом.

$$\text{Ответ: } p = \frac{1}{4}$$

Задача 28. 11 человек случайным образом садятся на десятиместную скамейку. Найти вероятность того, что три определённых лица окажутся рядом.

Решение: Найдём общее число исходов.

$C_{11}^{10} = 11$ способами можно выбрать 10 человек для рассадки на скамейку.

Из данного количества комбинаций необходимо исключить 3 случая, когда одному из трёх нужных людей не достанется места:

$$C_{11}^{10} - 3 = 11 - 3 = 8$$

Каждую десятку можно рассадить $10!$ способами.

Таким образом, общее количество исходов: $8 \cdot 10!$

Найдём благоприятствующее число исходов. Три искомого человека без учёта перестановок могут оказаться рядом 8 способами:

1	2	3							
	1	2	3						
		1	2	3					
			1	2	3				
				1	2	3			
					1	2	3		
						1	2	3	
							1	2	3

А с учётом их перестановок в каждой тройке: $8 \cdot 3!$ способами. Кроме того, для каждой из $8 \cdot 3!$ комбинаций другие 7 человек могут рассесться $7!$ способами. Таким образом, количество благоприятствующих исходов: $8 \cdot 3! \cdot 7!$

По классическому определению:

$$P = \frac{8 \cdot 3! \cdot 7!}{8 \cdot 10!} = \frac{6}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{120} \approx 0,0083$$
 – вероятность того, что три определённых

человека окажутся рядом.

Ответ: $\frac{1}{120} \approx 0,0083$

Задача 29. В пакете находится 20 штук семян, причем 17 из них – всхожие. Какова вероятность того, что из трех высаженных семечек окажутся невсхожими две.

Решение: найдём общее число исходов:

Найдём благоприятствующее количество исходов:

$C_3^2 = 3$ способами можно выбрать 2 невсхожих семени.

$C_{17}^1 = 17$ способами можно выбрать одно всхожее семя.

$C_3^2 \cdot C_{17}^1 = 3 \cdot 17 = 51$ способом можно выбрать искомую комбинацию семян.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_3^2 \cdot C_{17}^1}{C_{20}^3} = \frac{51}{1140} = \frac{17}{380} \approx 0,0447 \text{ – вероятность того, что из трех высаженных}$$

семечек окажутся невсхожими две.

Ответ: $\frac{17}{380} \approx 0,0447$

Задача 30. На новогодней елке присутствуют 20 девочек и 10 мальчиков. За участие в конкурсе призы получают 6 человек. Какова вероятность того, что среди получивших призы будет поровну мальчиков и девочек?

Решение: Всего: $20 + 10 = 30$ детей на новогодней елке.

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{24! \cdot 6!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{720} = 593775 \text{ способами можно распределить 6}$$

призов между 30 детьми.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140 \text{ способами можно распределить 3 приза между}$$

девочками.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120 \text{ способами можно распределить 3 приза между}$$

мальчиками.

По классическому определению вероятности:

$$p = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^3}{C_{30}^6} = \frac{1140 \cdot 120}{593775} = \frac{13485}{55389} = \frac{608}{2639} \text{ – искомая вероятность.}$$

Ответ: $p = \frac{608}{2639} \approx 0,23$

Задача 31. В бункере хранятся изделия 4 сортов, причем изделий первого сорта 20 штук, изделий второго сорта 50, изделий третьего сорта 20, четвертого – 30. Для контроля наугад берут 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них 1 изделие первого сорта, 3 – второго, 1 – третьего, 2 – четвертого.

Решение: Всего: $n = 20 + 50 + 20 + 30 = 120$ изделий.

Размер выборки: $m = 1 + 3 + 1 + 2 = 7$

$$C_{120}^7 = \frac{120!}{113! \cdot 7!} = 59487568920 \text{ способами можно выбрать 7 изделий из 120.}$$

$$C_{20}^1 = 20 \text{ способами можно выбрать изделие 1-го сорта;}$$

$$C_{50}^3 = \frac{50!}{47! \cdot 3!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{6} = 19600 \text{ способами можно выбрать три изделия 2-го сорта;}$$

$$C_{20}^1 = 20 \text{ способом можно выбрать одно изделие 3-го сорта;}$$

$$C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435 \text{ способами можно выбрать два изделия 4-го сорта.}$$

$$C_{20}^1 \cdot C_{50}^3 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{30}^2 = 20 \cdot 19600 \cdot 20 \cdot 435 = 3410400000 \text{ – способами можно выбрать}$$

искомую комбинацию изделий.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{20}^1 \cdot C_{50}^3 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{30}^2}{C_{120}^7} = \frac{3410400000}{59487568920} \approx 0,05733 - \text{искомая вероятность.}$$

Ответ: $p \approx 0,05733$

Задача 32. В ящике десять стандартных изделий и пять бракованных. Наугад извлекают три детали. Каковы вероятности того, что среди них: а) одна бракованная, б) две бракованных, в) хотя бы одна стандартная?

Решение: Всего: $10 + 5 = 15$ деталей в ящике.

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{12!3!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} = 455 \text{ способами можно извлечь три детали из ящика.}$$

а) Рассмотрим событие: A – среди трех извлеченных деталей будет ровно одна бракованная.

$$C_5^1 = 5 \text{ способами можно извлечь одну бракованную деталь;}$$

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ способами можно извлечь две стандартные детали.}$$

$$C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 5 \cdot 45 = 225 \text{ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.}$$

$$\text{По классическому определению вероятности: } P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91} \approx 0,49$$

б) Рассмотрим событие: B – среди трех извлеченных деталей будет ровно две бракованных.

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ способами можно извлечь две бракованные детали;}$$

$$C_{10}^1 = 10 \text{ способами можно извлечь одну стандартную деталь.}$$

$$C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.}$$

$$\text{По классическому определению: } P(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91} \approx 0,22$$

в) Рассмотрим события: C – среди трех извлеченных деталей будет хотя бы одна стандартная, \bar{C} – все три детали будут бракованными.

Данные события являются противоположными, по соответствующей теореме:

$$P(C) + P(\bar{C}) = 1$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ способами можно извлечь три бракованные детали.}$$

$$\text{По классическому определению: } P(\bar{C}) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}.$$

$$\text{Таким образом: } P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{2}{91} = \frac{89}{91} \approx 0,98 - \text{искомая вероятность.}$$

$$\text{Ответ: а) } P(A) = \frac{45}{91} \approx 0,49, \quad \text{б) } P(B) = \frac{20}{91} \approx 0,22, \quad P(C) = \frac{89}{91} \approx 0,98$$

Задача 33. В лотерее разыгрываются 1000 билетов, из которых 100 – выигрышные. Покупают три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?

Решение:

$C_{1000}^3 = \frac{1000!}{997! \cdot 3!} = \frac{998 \cdot 999 \cdot 1000}{6} = 166167000$ способами можно выбрать 3 билета из 1000.

$C_{100}^1 = 100$ способами можно выбрать один выигрышный билет.

$C_{900}^2 = \frac{900!}{898! \cdot 2!} = \frac{899 \cdot 900}{2} = 404550$ способами можно выбрать безвыигрышных билета.

$C_{100}^1 \cdot C_{900}^2 = 100 \cdot 404550 = 40455000$ способами можно выбрать искомую комбинацию билетов.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{100}^1 \cdot C_{900}^2}{C_{1000}^3} = \frac{40455000}{166167000} = \frac{13485}{55389}$ – вероятность того, что среди трех купленных билетов будет один выигрышный.

Ответ: $p = \frac{13485}{55389} \approx 0,24$

Задача 34. В корзине 15 шаров, из них 5 – красных, 5 – синих и 5 – желтых. Достают наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди них 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара?

Решение: найдём общее число исходов:

$C_{15}^4 = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{24} = 1365$ способами можно выбрать 4 шара из корзины.

Найдём количество благоприятствующих исходов:

$C_5^1 = 5$ способами можно выбрать один красный шар.

$C_5^1 = 5$ способами можно выбрать один синий шар.

$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ способами можно выбрать два желтых шара.

$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 10 = 250$ способами можно выбрать искомую комбинацию шаров.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^4} = \frac{250}{1365} = \frac{50}{273}$ – вероятность того, что среди четырех извлеченных шаров будет 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара.

Ответ: $p = \frac{50}{273} \approx 0,18$

Задача 35. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:

$$l = \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{1000} = 10 \text{ кубиков.}$$

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)

Кубиков с двумя окрашенными гранями: $8 * 12$ ребер = 96 кубиков.

Кубиков с одной окрашенной гранью: $8 * 8 * 6$ граней = 384 кубиков.

Неокрашенных кубиков: $1000 - 8 - 96 - 384 = 512$ кубиков.

$C_{1000}^1 = 1000$ способами можно извлечь 1 кубик.

$C_{96}^1 = 96$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями.

По классическому определению вероятности, вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани:

$$p = \frac{C_{96}^1}{C_{1000}^1} = \frac{96}{1000} = 0,096$$

Ответ: 0,096

Задача 36. Куб с окрашенными гранями распилен на $n = 216$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме 2 окрашенные грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:

$$l = \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ кубиков.}$$

Кубиков с тремя окрашенными гранями: 8 (вершины куба)

Кубиков с двумя окрашенными гранями: $4 * 12$ ребер = 48 кубиков.

Кубиков с одной окрашенной гранью: $4 * 4 * 6$ граней = 96 кубиков.

Неокрашенных кубиков: $216 - 8 - 48 - 96 = 64$ кубиков.

$C_{216}^3 = \frac{216!}{213!3!} = \frac{214 \cdot 215 \cdot 216}{6} = 1656360$ способами можно извлечь 3 кубика.

$C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 = 48 \cdot \frac{63 \cdot 64}{2} = 96768$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя

окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

$C_{96}^2 \cdot C_{64}^1 = \frac{95 \cdot 96}{2} \cdot 64 = 291840$ способами можно извлечь 2 кубика с одной

окрашенной гранью и один неокрашенный кубик.

По правилу сложения комбинаций: $C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1 = 96768 + 291840 = 388608$ способами можно извлечь 3 кубика с двумя окрашенными гранями

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1}{C_{216}^3} = \frac{388608}{1656360} \approx 0,23$$
 – вероятность того, что у трёх извлеченных

кубика будет в сумме две окрашенных грани.

Ответ: $\approx 0,23$

Задача 37. Куб с окрашенными гранями распилен на $n = 1000$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме $k = 3$ окрашенных грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в пересчёте на распиленные кубики:

$$l = \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{1000} = 10 \text{ кубиков.}$$

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)

Кубиков с двумя окрашенными гранями: $8 \cdot 12$ ребер = 96 кубиков.

Кубиков с одной окрашенной гранью: $8 \cdot 8 \cdot 6$ граней = 384 кубика.

Неокрашенных кубиков: $1000 - 8 - 96 - 384 = 512$ кубиков.

$$C_{1000}^3 = \frac{1000!}{997! \cdot 3!} = \frac{998 \cdot 999 \cdot 1000}{6} = 166167000 \text{ способами можно извлечь 3 кубика}$$

(общее число исходов).

$$1) C_8^1 \cdot C_{512}^2 = 8 \cdot \frac{511 \cdot 512}{2} = 1046528 \text{ способами можно извлечь 1 кубик с тремя}$$

окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

2) $C_{96}^1 \cdot C_{384}^1 \cdot C_{512}^1 = 96 \cdot 384 \cdot 512 = 18874368$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями, 1 кубик с одной окрашенной гранью и 1 неокрашенный кубик.

$$3) C_{384}^3 = \frac{382 \cdot 383 \cdot 384}{6} = 9363584 \text{ способами можно извлечь 3 кубика с одной}$$

окрашенной гранью.

Складываем количество благоприятствующих исходов:

$$C_8^1 \cdot C_{512}^2 + C_{96}^1 \cdot C_{384}^1 \cdot C_{512}^1 + C_{384}^3 = 1046528 + 18874368 + 9363584 = 29284480$$

способами можно извлечь 3 кубика, суммарное количество окрашенных граней которых равно трём.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_8^1 \cdot C_{512}^2 + C_{96}^1 \cdot C_{384}^1 \cdot C_{512}^1 + C_{384}^3}{C_{1000}^3} = \frac{29284480}{166167000} \approx 0,1762$$
 – искомая вероятность.

Ответ: $\approx 0,1762$