Сборник задач на теоремы сложения и умножения вероятностей

Задача 1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятности того, что: а) при аварии сработает только один сигнализатор; б) сработает хотя бы один сигнализатор

Решение: по условию $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$ – вероятности срабатывания соответствующих сигнализаторов. Тогда вероятности, того, что они не сработают:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$\widetilde{p}_1 = p_1 q_2 + q_1 p_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14$ – вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q = q_1 q_2 = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$ – вероятность того, что при аварии оба сигнализатора не сработают.

Найдём вероятность противоположного события:

$p = 1 - q = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$ – вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

Ответ: а) 0,14 б) 0,995

Задача 2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий: а) только одно стандартное; б) хотя бы одно стандартное.

Решение: по условию $p = 0{,}9$ – вероятность того, что изделие стандартно.

Тогда вероятность того, что изделие нестандартно:

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$\widetilde{p}_1 = pq + qp = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}18$ – вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q^* = qq = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ – вероятность того, оба изделия нестандартны.

Найдём вероятность противоположного события:

$p^* = 1 - q^* = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ – вероятность того, что из двух проверенных изделий хотя бы одно стандартное.

Ответ: а) 0,18 б) 0,99

Задача 3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность поражения цели хотя бы одним из орудий.

Решение: Обозначим через p_1 – вероятность попадания в цель из первого орудия. Тогда вероятность промаха из первого орудия: $q_1 = 1 - p_1$.

По условию: $p_2 = 0{,}8$ – вероятность попадания в цель из второго орудия. Тогда вероятность промаха из второго орудия: $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий: $p = p_1 q_2 + q_1 p_2$ – вероятность того, что при одном залпе из двух орудий произойдет ровно одно попадание в цель.

По условию $p = 0{,}38$, таким образом:

$0{,}38 = p_1 \cdot 0{,}2 + (1 - p_1) \cdot 0{,}8$

$0{,}38 = 0{,}2 p_1 + 0{,}8 - 0{,}8 p_1$

$0{,}6 p_1 = 0{,}42$

$p_1 = 0{,}7$ – вероятность попадания в цель из первого орудия

$q_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ – вероятность промаха из первого орудия

По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$q^* = q_1 q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$ – вероятность промаха из обоих орудий.

Тогда вероятность противоположного события:
$p^* = 1 - q^* = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$ – вероятность поражения цели хотя бы одним из орудий.

Ответ: $p_1 = 0{,}7$ – вероятность поражения цели при одном выстреле из 1-го орудия,
$p^* = 0{,}94$ – вероятность поражения цели хотя бы одним из орудий

Задача 4. Два стрелка стреляют по мишени по одному разу. Вероятность того, что оба стрелка попали в мишень, равна 0,54, а вероятность того, что оба промахнулись – 0,04. Какова вероятность попадания в мишень каждым стрелком при одном выстреле?

Решение: Обозначим через p_1, p_2 вероятности попадания в цель соответствующими стрелками. По теореме умножения вероятностей независимых событий: $p_1 p_2 = 0{,}54$ – вероятность того, что оба стрелка попали в цель.

Если p_1, p_2 – вероятности попадания, то $1 - p_1$, $1 - p_2$ – вероятности промаха для соответствующих стрелков. По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$(1 - p_1)(1 - p_2) = 0{,}04$ – вероятность того, что оба стрелка промахнулись.

$1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 = 0{,}04$

Подставим в данное уравнение $p_1 p_2 = 0{,}54$:

$$1-p_1-p_2+0{,}54=0{,}04$$
$$p_1+p_2=1{,}5$$

Решим систему:

$$\begin{cases} p_1p_2=0{,}54 \\ p_1+p_2=1{,}5 \end{cases} \Rightarrow p_2=1{,}5-p_1$$ – подставим в первое уравнение:

$$p_1(1{,}5-p_1)=0{,}54$$
$$1{,}5p_1-p_1^2=0{,}54$$
$$p_1^2-1{,}5p_1+0{,}54=0$$

$$D=2{,}25-2{,}16=0{,}09;\ D=0{,}3$$

1) $p_1=\dfrac{1{,}5-0{,}3}{2}=0{,}6 \Rightarrow p_2=1{,}5-p_1=1{,}5-0{,}6=0{,}9$

2) $p_1=\dfrac{1{,}5+0{,}3}{2}=0{,}9 \Rightarrow p_2=1{,}5-p_1=1{,}5-0{,}9=0{,}6$

Ответ: 0,6 и 0,9 либо 0,9 и 0,6

Задача 5. Изделие, выпускаемое предприятием, состоит из трех основных частей, количество бракованных среди которых составляет 6%, 14%, 13%. Изделие признается непригодным и заменяется бесплатно, если хотя бы одна из его частей имеет брак. Оценить затраты на замену изделия в случае брака. Стоимость одного изделия 500 *руб.*

Решение: Из условия следует, что $q_1=0{,}06$, $q_2=0{,}14$, $q_3=0{,}13$ – вероятности того, что соответствующие части изделия будут бракованными.

Найдем p_1, p_2, p_3 – вероятности того, что соответствующие части изделия будут качественными.

$$p_1=1-q_1=1-0{,}18=0{,}94;$$
$$p_2=1-q_2=1-0{,}14=0{,}86;$$
$$p_3=1-q_3=1-0{,}13=0{,}87.$$

Рассмотрим события:

A – изделие будет качественным (все три части изделия качественны);

$\overline{A}$ – изделие будет непригодным (хотя бы одна из частей изделия бракованна).

События A и $\overline{A}$ являются противоположными, поэтому: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A)=p_1p_2p_3=0{,}94\cdot 0{,}86\cdot 0{,}87=0{,}703308.$$

Таким образом, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}703308=0{,}296692$

Затраты на замену изделия:

$500\cdot 0{,}296692=148{,}346$ *руб.*

Ответ: $148{,}346$ *руб.*

Задача 6. Из партии бюллетеней, доставленных с 3 избирательных участков, эксперт отбирает только действительные бюллетени. Вероятность того, что бюллетень с первого участка окажется действительным, равна 0,95, со второго – 0,9, с третьего – 0,85. Найти вероятность того, что из трех выбранных бюллетеней (по одному с каждого участка): а) только два действительных, б) хотя бы один действительный.

Решение: по условию $p_1 = 0{,}95$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}85$ – вероятности того, что бюллетень, поступивший с соответствующих участков является действительным.

Тогда вероятности того, что бюллетень является недействительным:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15.$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}15 + 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}85 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 =$

$= 0{,}12825 + 0{,}08075 + 0{,}03825 = 0{,}24725$ – вероятность того, из трех выбранных бюллетеней только два действительных.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q = q_1 q_2 q_3 = 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 = 0{,}00075$ – вероятность того, что все три бюллетеня не действительны.

Тогда вероятность противоположного события:

$p = 1 - q = 1 - 0{,}00075 = 0{,}99925$ – вероятность того, что из трех выбранных бюллетеней хотя бы один действительный.

Ответ: а) 0,24725   б) 0,99925

Задача 7. Для успешной сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один из двух предложенных теоретических вопросов и решить задачу. Вероятность того, что студент правильно ответит на теоретический вопрос, равна 0,7, решит задачу 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Решение: По условию $p_T = 0{,}7$ – вероятность того, что студент сможет ответить на теоретический вопрос. Тогда $q_T = 1 - p_T = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ – вероятность того, что он не ответит на теоретический вопрос.

По условию $p_З = 0{,}8$ – вероятность того, что студент решит задачу.

Студент сдаст экзамен в том случае, если ответит на оба теоретических вопроса и решит задачу либо ответит на один теоретический вопрос (первый или второй) и решит задачу. По теореме умножения вероятностей независимых и сложения вероятностей несовместных событий:

$p = p_T p_T p_З + p_T q_T p_З + q_T p_T p_З = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$

$= 0{,}392 + 0{,}168 + 0{,}168 = 0{,}728$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Ответ: 0,728

Задача 8. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что: а) только в двух из них допущенная ошибка превысит заданную точность; б) хотя бы в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

Решение: по условию $p = 0{,}4$ – вероятность того, что будет допущена ошибка, превышающая заданную точность. Тогда вероятность безошибочного измерения:

$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p(2) = ppq + pqp + qpp = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 =$

$= 3 \cdot 0{,}096 = 0{,}288$ – вероятность того, в трех измерениях будет допущено ровно две ошибки, превышающие заданную точность.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$q^* = qqq = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$ – вероятность того, в трех измерениях не будет ошибок, превышающих заданную точность.

Найдём вероятность противоположного события:

$p^* = 1 - q^* = 1 - 0{,}216 = 0{,}784$ – вероятность того, что хотя бы в одном из трех измерений допущенная ошибка превысит заданную точность.

Ответ: а) 0,288 б) 0,784

Задача 9. Стрелок попадает в мишень с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность того, что после трёх выстрелов мишень уцелеет, равна 0,064.

Решение: Обозначим через q – вероятность промаха стрелка при каждом выстреле, тогда вероятность его попадания при каждом выстреле: $p = 1 - q$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$\tilde{q} = qqq = q^3$ – вероятность того, что при трех выстрелах будет три промаха (мишень уцелеет).

С другой стороны, по условию $\tilde{q} = 0{,}064$

Таким образом:

$q^3 = 0{,}064 \Rightarrow q = \sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4$

Искомая вероятность: $p = 1 - q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Ответ: 0,6

Задача 10. В одной урне 1 белый и 4 черных шара, а в другой – 2 белых и 4 черных, в третьей – 3 белых и 1 черный. Из каждой урны извлекли по шару. Найти вероятность того, что среди них:

а) не окажется белых;

б) будет один белый и два черных.

Решение: найдём вероятности извлечения шаров соответствующих цветов из соответствующих урн. По классическому определению:

$$p_{1б} = \frac{1}{5},\ p_{1ч} = \frac{4}{5};$$

$$p_{2б} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ p_{2ч} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$p_{3б} = \frac{3}{4},\ p_{3ч} = \frac{1}{4}.$$

По условию из каждой урны извлечено по одному шару.

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p = p_{1ч}p_{2ч}p_{3ч} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{15}$ – вероятность того, что среди трех извлеченных шаров не окажется белых (все будут черными).

б) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$$\tilde{p} = p_{1б}p_{2ч}p_{3ч} + p_{1ч}p_{2б}p_{3ч} + p_{1ч}p_{2ч}p_{3б} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} =$$

$= \frac{2}{60} + \frac{4}{60} + \frac{24}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что среди трех извлеченных шаров будет один белый и два черных.

Ответ: а) $\frac{2}{15}$, б) $\frac{1}{2}$

Задача 11. В первой урне содержится 5 белых и 3 черных шара, во второй – 5 белых и 7 черных, в третьей – 5 белых и 1 черный. Наудачу из каждой урны извлекают шар. Какова вероятность того, что эти шары будут: а) белыми; б) хотя бы два шара из трех шаров будут черными.

Решение: Всего: 5 + 3 = 8 шаров в первой урне, $p_{1б} = \frac{5}{8}$ – вероятность извлечения белого шара из первой урны, $p_{1ч} = \frac{3}{8}$ – вероятность извлечения черного шара.

Всего: 5 + 7 = 12 шаров во второй урне, $p_{2б} = \frac{5}{12}$ – вероятность извлечения белого шара из второй урны, $p_{2ч} = \frac{7}{12}$ – вероятность извлечения черного шара.

Всего: 5 + 1 = 6 шаров в третьей урне, $p_{3б}=\frac{5}{6}$ – вероятность извлечения белого шара из третьей урны, $p_{2ч}=\frac{1}{6}$ – вероятность извлечения черного шара.

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{ббб}=p_{1б}p_{2б}p_{3б}=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{576}$ – вероятность того, что все три извлеченных шара будут белыми.

б) Событие «Хотя бы два шара из трех будут черными» состоит в двух несовместных исходах: либо все три шара будут черными либо два шара из трех будут черными. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$$p=p_{1ч}p_{2ч}p_{3ч}+p_{1б}p_{2ч}p_{3ч}+p_{1ч}p_{2б}p_{3ч}+p_{1ч}p_{2ч}p_{3б}=$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{6}=\frac{21}{576}+\frac{35}{576}+\frac{15}{576}+\frac{105}{576}=\frac{176}{576}=\frac{11}{36}$$
– вероятность того, что хотя бы два шара из трех шаров будут черными.

Ответ: а) $\frac{125}{576}\approx 0{,}22$ б) $\frac{11}{36}\approx 0{,}31$

Задача 12. В городе 4 коммерческих банка, оценка надежности которых равны 0,8, 0,92, 0,95, 0,98 соответственно. Найти вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени обанкротится хотя бы один.

Решение: По условию $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}92$, $p_3=0{,}95$, $p_4=0{,}98$ – вероятности того, что соответствующие банки не обанкротятся.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p=p_1p_2p_3p_4=0{,}8\cdot 0{,}92\cdot 0{,}95\cdot 0{,}98=0{,}685216$ – вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени не обанкротится ни один банк.

Найдём вероятность противоположного события:

$q=1-p=1-0{,}685216=0{,}314784$ – вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени обанкротится хотя бы один банк.

Ответ: 0,314784

Задача 13. Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы в течение месяца соответственно равны: 0,6 для первого элемента; 0,8 для второго; 0,7 для третьего и 0,9 для четвертого. Найти вероятность того, что в течение месяца будут безотказно работать: а) все 4 элемента; б) только один элемент; в) не менее двух элементов.

Решение: по условию $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}9$ – вероятности безотказной работы соответствующих элементов в течение месяца.

Тогда вероятности их отказа:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$

$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(4)} = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024$ – вероятность того, что в течение месяца будут безотказно работать все 4 элемента

б) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$$p_{(1)} = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}0036 + 0{,}0096 + 0{,}0056 + 0{,}0216 = 0{,}0404$$

– вероятность того, что в течение месяца будет безотказно работать только один элемент.

в) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(0)} = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$ – вероятность того, что в течение месяца откажут все 4 элемента.

По теореме сложения вероятностей событий, образующих полную группу:

$p_{(2,3,4)} = 1 - (p_{(0)} + p_{(1)}) = 1 - (0{,}0404 + 0{,}0024) = 1 - 0{,}0428 = 0{,}9572$ – вероятность того, что в течение месяца будут безотказно работать не менее двух элементов.

Ответ: а) 0,3024 б) 0,0404 в) 0,9572

Задача 14. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) не менее трёх раз.

Решение: Из условия следуют вероятности попадания в цель при 1, 2, 3 и 4-м выстрелах соответственно: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}4$

Тогда вероятность промаха при соответствующих выстрелах:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,6 = 0,4$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,5 = 0,5$

$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0,4 = 0,6$

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(4)} = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$ – вероятность того, что цель будет поражена 4 раза.

б) По теореме умножения вероятностей независимых и сложения вероятностей несовместных событий:

$p_{(3)} = q_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 q_4 =$

$= 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 =$

$= 0,036 + 0,056 + 0,084 + 0,126 = 0,302$ – вероятность того, что цель будет поражена 3 раза.

в) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$p_{(3,4)} = p_{(3)} + p_{(4)} = 0,084 + 0,302 = 0,386$ – вероятность того, что цель будет поражена не менее трёх раз.

Ответ: а) 0,084 б) 0,302 в) 0,386

Задача 15. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем и четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух.

Решение: по условию $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,8$, $p_4 = 0,9$ – вероятности того, что нужная сборщику деталь содержится в соответствующих ящиках.

Тогда вероятности, того, что данная деталь отсутствует в соответствующих ящиках:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,8 = 0,2;$

$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0,9 = 0,1.$

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(4)} = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,3024$ – вероятность того, что нужная сборщику деталь содержится во всех четырех ящиках.

Найдём вероятность противоположного события:

$p_{(0,1,2,3)} = 1 - p_{(4)} = 1 - 0,3024 = 0,6976$ – вероятность того, что нужная сборщику деталь содержится не более чем в трех ящиках.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(0)} = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$ – вероятность того, что нужная сборщику деталь отсутствует во всех ящиках.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p_{(1)} = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$

$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404$ – вероятность того, что данная деталь содержится только в одном ящике.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$p_{(0,1)} = p_{(0)} + p_{(1)} = 0{,}024 + 0{,}0404 = 0{,}0428$ – вероятность того, что данная деталь содержится не более чем в двух ящиках.

Тогда вероятность противоположного события:

$p_{(2,3,4)} = 1 - p_{(0,1)} = 1 - 0{,}0428 = 0{,}9572$ – вероятность того, что нужная сборщику деталь содержится не менее чем в двух ящиках.

Ответ: а) 0,6976 б) 0,9572

Задача 16. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p, кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир, с вероятностью $1 - p_0$ входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров (предполагается, что более одного пассажира войти не может).

Решение: рассмотрим событие: A – автобус после остановки тронулся в путь, и в нём находится по-прежнему n пассажиров. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1) На остановке никто не вышел и никто не зашел. По теореме умножения независимых событий: $(1-p)^n p_0$ – соответствующая вероятность.

2) На остановке вышел один пассажир и зашел один пассажир.

$C_n^1 = n$ способами может выйти 1 пассажир и вероятность каждого из этих случаев составляет: $(1-p)^{n-1} p$. Согласно комбинаторному правилу умножения и по теореме умножения независимых событий

$n(1-p)^{n-1} p(1-p_0)$ – вероятность того, что на остановке вышел один пассажир и зашел один пассажир.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A) = (1-p)^n p_0 + n(1-p)^{n-1} p(1-p_0)$ – искомая вероятность.

Ответ: $(1-p)^n p_0 + n(1-p)^{n-1} p(1-p_0)$

Задачи с зависимыми событиями

Задача 17. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

Решение: всего: 3 + 3 = 6 шаров в урне.

Известно, что в первом испытании был извлечен черный шар, соответствующая вероятность:

$$p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

В урне осталось 2 черных и 3 белых шара (всего 5 шаров). Тогда вероятность появления белого шара во втором испытании, при условии, что в первом испытании был извлечен черный шар:

$$p_{2(p_1)} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Ответ: 0,6

Задача 18. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны дважды извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение: всего: 5 + 6 = 11 шаров урне.

По классическому определению:

$p_{1Б} = \frac{5}{11}$ – вероятность того, что в первом испытании из урны будет извлечен белый шар.

Предположим, что в первом испытании из урны извлечен белый шар.
В урне осталось: 4 белых, 6 черных – всего 10 шаров.

Тогда:

$p_{2Б(1Б)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ – вероятность того, что во втором испытании из урны будет извлечен белый шар, при условии, что в первом испытании был извлечен белый шар.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$p_{ББ} = p_{1Б} \cdot p_{2Б(1Б)} = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{11}$ – вероятность того, что из урны будут извлечены два белых шара подряд.

Ответ: $p_{ББ} = \frac{2}{11} \approx 0{,}1818$

Задача 19. Согласно данным переписи населения на каждую 1000 новорожденных число умерших в возрасте до 25 лет составляет 40 человек, а число умерших в возрасте до 75 лет – 98 человек. Найти вероятность того, что человек, доживший до 25 лет, доживет и до 75 лет.

Решение: По данным переписи населения на каждую 1000 новорожденных число тех, кто доживет до 25 лет, составит 1000 – 40 = 960 человек.

Тогда вероятность того, что человек доживет до 25 лет, равна:

$$p_{25} = \frac{960}{1000} = \frac{24}{25}$$

Из оставшихся 960 человек, доживших до 25 лет, до 75 лет умрут ещё 98 – 40 = 58 человек. То есть, вероятность того, что человек доживет до 75 лет, при условии, что он дожил до 25 лет, составляет:

$$p_{75(25)} = \frac{960-58}{960} = \frac{902}{960} = \frac{451}{480}$$

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$p = p_{25} \cdot p_{75(25)} = \frac{24}{25} \cdot \frac{451}{480} = \frac{451}{500} = 0{,}902$ – вероятность того, что человек, доживший до 25 лет, доживет и до 75 лет.

Ответ: 0,902

Задача 20. В урне 9 белых и 8 черных шаров. Извлекаются один за другим 3 шара. Найти вероятность того, что из трех извлечённых шаров хотя бы один белый.

Решение: всего в урне: 9 + 8 = 17 шаров.

Рассмотрим противоположные события:

A – из урны один за другим извлечено 3 чёрных шара;
$\overline{A}$ – из урны последовательно извлечено три шара, хотя бы один из которых белый.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A) = \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{7}{85}$$

Тогда вероятность противоположного события:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{85} = \frac{78}{85}$$

Ответ: $\frac{78}{85} \approx 0{,}9176$

Задача 21. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом свёрла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке убывания диаметра?

Решение:

$p_1 = \frac{1}{6}$ – вероятность извлечения сверла самого большого диаметра в 1-й попытке.

$p_2 = \frac{1}{5}$ – вероятность извлечения сверла чуть меньшего диаметра во 2-й попытке, при условии, что в 1-й попытке было извлечено сверло самого большого диаметра.

$p_3 = \frac{1}{4}$ – вероятность извлечения искомого сверла в 3-й попытке при условии извлечения свёрл в перечисленном выше порядке.

$p_4 = \frac{1}{3}$ – вероятность извлечения искомого сверла в 4-й попытке при условии извлечения свёрл в перечисленном выше порядке.

$p_5 = \frac{1}{2}$ – вероятность извлечения искомого сверла в 5-й попытке при условии извлечения свёрл в перечисленном выше порядке.

$p_6 = 1$ – вероятность извлечения сверла самого маленького диаметра при условии извлечения свёрл в перечисленном выше порядке.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$p = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{720}$ – вероятность того, что свёрла будут извлечены в порядке убывания диаметра.

Ответ: $\frac{1}{720} \approx 0{,}0014$

Задача 22. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Каждый стрелок имеет два патрона. При первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас.

Решение: по условию $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$ – вероятность попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

Искомое событие состоит в том, что при первых пяти последовательных выстрелах будут промахи, а при 6-м выстреле третьим стрелком будет либо промах, либо попадание.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

$p = q_1 q_2 q_3 q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3 q_1 q_2 p_3 = q_1 q_2 q_3 q_1 q_2 (q_3 + p_3) = q_1 q_2 q_3 q_1 q_2 =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}18816$ – вероятность того, что все стрелки израсходуют весь свой боезапас.

Ответ: 0,18816

Задача 23. В каждом из двух ящиков содержатся 6 черных и 4 белых шара. Из первого ящика наудачу переложили во второй ящик 1 шар. Найти вероятность того, что два наугад взятых шара из второго ящика будут белыми.

Решение: всего: 6 + 4 = 10 шаров в первом ящике.

Рассмотрим две несовместные гипотезы:

1) $p_{1б} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ – вероятность того, что из 1-го ящика будет извлечён и переложен во 2-й ящик белый шар. Предположим, что данная гипотеза осуществилась. Тогда во втором ящике стало 11 шаров: 6 чёрных и 5 белых.

$C_{11}^2 = \frac{11!}{9!2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ способами можно извлечь два шара из 2-го ящика.

$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ способами можно извлечь два белых шара из 2-го ящика.

По классическому определению:

$p_{2бб(1б)} = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$ – вероятность того, что из второго ящика будут извлечено два белых шара при условии, что туда был переложен белый шар.

2) $p_{1ч} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ – вероятность того, что из 1-го ящика будет извлечён и переложен во 2-й ящик чёрный шар. Предположим, что данная гипотеза осуществилась. Тогда во втором ящике стало 11 шаров: 7 чёрных и 4 белых.

$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ способами можно извлечь два белых шара из 2-го ящика.

По классическому определению:

$p_{2бб(1ч)} = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$ – вероятность того, что из второго ящика будут извлечено два белых шара.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:

$p = p_{1б} \cdot p_{2бб(1б)} + p_{1ч} \cdot p_{2бб(1ч)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{11} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{55} = \frac{4}{55} + \frac{18}{275} = \frac{38}{275}$ – вероятность того, что после перекладывания шара, два наугад взятых шара из второго ящика будут белыми

Ответ: $\frac{38}{275} \approx 0{,}1382$

Задача 24. В первой урне находятся 3 шара белого и 1 шар черного цвета, во второй – 2 белого и 1 синего, в третьей – 4 белых и 2 красных. Из первой и второй урны наудачу извлекают по одному шару и кладут в третью. После этого из третьей извлекают один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.

Решение: рассмотрим первую урну: всего 3 + 1 = 4 шара, тогда $p_{1б}=\frac{3}{4}$, $p_{1ч}=\frac{1}{4}$ – вероятности извлечения из 1-й урны белого и черного шара соответственно.

Рассмотрим вторую урну: всего 2 + 1 = 3 шара, тогда $p_{2б}=\frac{2}{3}$, $p_{2с}=\frac{1}{3}$ – вероятности извлечения из 1-й урны белого и синего шара соответственно.

Пусть из первых двух урн случайным образом извлекается по одному шару, и перекладывают их в третью урну. При этом возможны четыре несовместных исхода:

1) Извлечены два белых шара. По теореме умножения вероятностей независимых событий, соответствующая вероятность: $p_{1б}\cdot p_{2б}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$. В третьей урне стало: 8 шаров, среди них – 6 белых, условная вероятность извлечения белого шара из 3-й урны – $p_{3б}(p_{1б}p_{2б})=\frac{6}{8}$

2) Из первой урны извлечен белый шар, из второй – синий шар. По теореме умножения вероятностей независимых событий, соответствующая вероятность: $p_{1б}\cdot p_{2с}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$. В третьей урне стало: 8 шаров, среди них – 5 белых, условная вероятность извлечения белого шара из 3-й урны – $p_{3б}(p_{1б}p_{2с})=\frac{5}{8}$

3) Из первой урны извлечен черный шар, из второй – белый. По теореме умножения вероятностей независимых событий, соответствующая вероятность: $p_{1ч}\cdot p_{2б}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$. В третьей урне стало: 8 шаров, среди них – 5 белых, условная вероятность извлечения белого шара из 3-й урны – $p_{3б}(p_{1ч}p_{2б})=\frac{5}{8}$

4) Из первой урны извлечен черный шар, из второй – синий. По теореме умножения вероятностей независимых событий, соответствующая вероятность: $p_{1ч}\cdot p_{2с}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$. В третьей урне стало: 8 шаров, среди них – 4 белых, условная вероятность извлечения белого шара из 3-й урны – $p_{3б}(p_{1ч}p_{2с})=\frac{4}{8}$

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:

$$p=p_{1б}p_{2б}\cdot p_{3б}(p_{1б}p_{2б})+p_{1б}p_{2с}\cdot p_{3б}(p_{1б}p_{2с})+p_{1ч}p_{2б}\cdot p_{3б}(p_{1ч}p_{2б})+p_{1ч}p_{2с}\cdot p_{3б}(p_{1ч}p_{2с})=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{8}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{12}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{8}=\frac{36}{96}+\frac{15}{96}+\frac{10}{96}+\frac{4}{96}=\frac{65}{96}\approx 0{,}68$$ – вероятность того, что после перемещения шаров из третьей урны будет извлечен белый шар.

Ответ: $\frac{65}{96}\approx 0{,}68$

Задача 25. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

Решение: Всего: 6 + 4 = 10 шаров в первой урне.

По классическому определению:

$p_{1ч} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $p_{1б} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ – вероятности того, что из первой урны будет извлечен и переложен во вторую черный и белый шар соответственно.

1) Пусть переложен черный шар, тогда во второй урне стало 7 черных, 4 белых, всего – 11 шаров.

а) $p(1ч)_{2ч} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{21}{55}$ – вероятность того, что из второй урны в третью будет переложен черный шар при условии, что из первой урны во вторую был переложен черный шар.

б) $p(1ч)_{2б} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{12}{55}$ – вероятность того, что из второй урны в третью будет переложен белый шар при условии, что из первой урны во вторую был переложен черный шар.

2) Пусть из первой во вторую урну переложен белый шар, тогда во второй урне стало 6 черных, 5 белых, всего – 11 шаров.

$p(1б)_{2ч} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{55}$ – вероятность того, что из второй урны в третью будет переложен черный шар при условии, что из первой урны во вторую был переложен белый шар.

$p(1б)_{2б} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{55}$ – вероятность того, что из второй урны в третью будет переложен белый шар при условии, что из первой урны во вторую был переложен белый шар.

При перемещении одного шара из второй урны в третью для случаев **1а**, **2а**, в третьей урне станет: 7 черных и 4 белых шара.

Для случаев **1б**, **2б** – 6 черных и 5 белых.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{21}{55} \cdot \frac{4}{11} + \frac{12}{55} \cdot \frac{5}{11} + \frac{12}{55} \cdot \frac{4}{11} + \frac{10}{55} \cdot \frac{5}{11} = \frac{84}{605} + \frac{60}{605} + \frac{48}{605} + \frac{50}{605} = \frac{242}{605} = \frac{2}{5} -$$

вероятность того, что после перемещения шаров из третьей урны будет извлечен белый шар.

Ответ: $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$