

Сборник готовых задач с непрерывной случайной величиной

Дополнительный материал к теме «Непрерывная случайная величина»:
http://mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html

Оглавление: (кликабельно)

1. Задачи, в которых СВ задана функцией распределения	2
2. Задачи, в которых СВ задана функцией плотности	20
3. Равномерное распределение случайной величины	41
4. Показательное распределение вероятностей	47
5. Нормальное распределение вероятностей	51

1. Задачи, в которых СВ задана функцией распределения

Задача 1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 3x); & 0 < x \leq 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(X > 1)$

Решение: найдем функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 3) = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1); & 0 < x \leq 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)dx = \frac{3}{2} \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(4 - \frac{16}{3} + 2 \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)dx = \frac{3}{2} \int_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{32}{5} - 8 + \frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{8}{5} - 1^2 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} = 0,6$$

$P(X > 1) = F(+\infty) - F(1) = 1 - \frac{1}{2}(1 - 3 + 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение большее единицы.

Ответ: $M(X) = 1$, $D(X) = \frac{3}{5} = 0,6$, $P(X > 1) = \frac{1}{2} = 0,5$

Задача 2. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $P(X > 1)$

Решение: найдем функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{(x+1)^3}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2}{(x+1)^3} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$$

Сначала найдем неопределенный интеграл:

$$2 \int \frac{xdx}{(x+1)^3} = (*)$$

Проведем замену: $t = x+1$, $x = t-1$, $dt = dx$

$$2 \int \frac{(t-1)dt}{t^3} = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt = 2 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) = 2 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} M(X) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) \Big|_0^b = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2(b+1)^2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$P(X > 1) = F(+\infty) - F(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $M(X) = 1$, $P(X > 1) = \frac{1}{4}$

Задача 3. Известна функция распределения случайной величины T – срока службы блока:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ kt^2, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 1, & t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Найти коэффициент k , средний срок службы и дисперсию срока службы блока.

Решение: по свойству функции распределения:

$$F\left(\frac{3}{4}\right) = k\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$

$$k \cdot \frac{9}{16} = 1$$

$$k = \frac{16}{9}$$

Таким образом, функция распределения вероятностей:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{16}{9}t^2, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 1, & t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Найдем функцию плотности распределения:

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{32t}{9}, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0, & t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Вычислим средний срок службы блока:

$$M(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{32}{9} \int_0^{\frac{3}{4}} t^2 dt = \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{3} (t^3) \Big|_0^{\frac{3}{4}} = \frac{32}{27} \cdot \left(\frac{27}{64} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

Дисперсию службы блока вычислим по формуле:

$$D(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - (M(T))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{32}{9} \int_0^{3/4} t^3 dt = \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{4} (t^4) \Big|_0^{3/4} = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{81}{256} - 0 \right) = \frac{9}{32}$$

Таким образом:

$$D(T) = \frac{9}{32} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{32} - \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

Ответ: $k = \frac{16}{9}$, $M(T) = \frac{1}{2}$, $D(T) = \frac{1}{32}$

Задача 4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x) = c + d(x-2)^4$ на интервале $(2;6)$. Найти: значения постоянных c и d ; плотность распределения вероятностей $f(x)$; $P(5 < X < 6)$; математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$

Решение: найдем значения c и d . По свойству функции распределения:

$$F(2) = c + 0 = c = 0$$

$$F(6) = 0 + d(6-2)^4 = d \cdot 2^8 = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{1}{2^8} (x-2)^4, & 2 < x < 6; \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{1}{2^6} (x-2)^3, & 2 < x < 6; \\ 0, & x \geq 6 \end{cases}$$

Вычислим $P(5 < X < 6) = F(6) - F(5) = 1 - \frac{3^4}{2^8} = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0,68$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \frac{1}{2^6} \int_2^6 x(x-2)^3 dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = (x-2)^3 dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} (x-2)^4$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{1}{2^6} \left[\frac{x}{4} (x-2)^4 \Big|_2^6 - \frac{1}{4} \int_2^6 (x-2)^4 dx \right] = \frac{1}{2^8} \left[6 \cdot 2^8 - 0 - \frac{1}{5} (x-2)^5 \Big|_2^6 \right] = \\
 &= \frac{1}{2^8} \left(6 \cdot 2^8 - \frac{2^{10}}{5} + 0 \right) = 6 - \frac{4}{5} = \frac{26}{5} = 5 \frac{1}{5} = 5,2
 \end{aligned}$$

Вычислим дисперсию. Используем формулу:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2^6} \int_2^6 x^2 (x-2)^3 dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = (x-2)^3 dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} (x-2)^4$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = \frac{1}{2^6} \left[\frac{x^2}{4} (x-2)^4 \Big|_2^6 - \frac{2}{4} \int_2^6 x (x-2)^4 dx \right] = \frac{1}{2^8} \left[36 \cdot 2^8 - 0 - 2 \int_2^6 x (x-2)^4 dx \right] = (*)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = (x-2)^4 dx \Rightarrow v = \frac{1}{5} (x-2)^5$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{1}{2^8} \left[36 \cdot 2^8 - 2 \left(\frac{x}{5} (x-2)^5 \Big|_2^6 - \frac{1}{5} \int_2^6 (x-2)^5 dx \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2^8} \left[36 \cdot 2^8 - \frac{12}{5} \cdot 2^{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} (x-2)^6 \Big|_2^6 \right] = \\
 &= \frac{1}{2^8} \left[36 \cdot 2^{10} - \frac{12}{5} \cdot 2^{10} + \frac{1}{15} \cdot 2^{12} \right] = 36 - \frac{48}{5} + \frac{16}{15} = \frac{412}{15}
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{412}{15} - \left(\frac{26}{5} \right)^2 = \frac{412}{15} - \frac{676}{25} = \frac{32}{75} \approx 0,43$$

Задача 5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x) = c + \frac{d}{(x+2)^3}$ на интервале $(2; +\infty)$. Найти: значения постоянных c и d ; плотность распределения вероятностей $f(x)$; $P(2 < X < 3)$; математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$

Решение: найдем значения постоянных c и d . Используем свойство непрерывности функции распределения:

$$F(+\infty) = c + \frac{d}{+\infty} = c + 0 = 1 \Rightarrow c = 1;$$

$$F(2) = 1 + \frac{d}{4^3} = 0 \Rightarrow d = -2^6 = -64.$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 1 - \frac{2^6}{(x+2)^3}, & x > 2 \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{3 \cdot 2^6}{(x+2)^4}, & x > 2 \end{cases}$$

$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{2^6}{5^3} - 0 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125} = 0,488$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 3 \cdot 2^6 \int_2^{+\infty} \frac{x}{(x+2)^4} dx = (*)$$

Проведем замену: $t = x + 2 \Rightarrow x = t - 2 \Rightarrow dx = dt$

Новые пределы интегрирования:

$$t_1 = 2 + 2 = 4;$$

$$t_2 = +\infty + 2 = +\infty$$

$$\begin{aligned} (*) &= 3 \cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \frac{t-2}{t^4} dt = 3 \cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^4} \right) dt = 3 \cdot 2^6 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{2}{3t^3} \right) \Big|_4^b = \\ &= 3 \cdot 2^6 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{2}{3b^3} \right) - \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{2}{3 \cdot 2^3} \right) \right) = 3 \cdot 2^6 \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} \right) = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= 3 \cdot 2^6 \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{(x+2)^4} dx = 3 \cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \frac{(t-2)^2}{t^4} dt = 3 \cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \frac{t^2 - 4t + 4}{t^4} dt = \\ &= 3 \cdot 2^6 \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t^3} + \frac{4}{t^4} \right) dt = 3 \cdot 2^6 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{4}{3t^3} \right) \Big|_4^b = \\ &= 3 \cdot 2^6 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{b} + \frac{2}{b^2} - \frac{4}{3b^3} \right) - \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3 \cdot 2^4} \right) \right) = 3 \cdot 2^6 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} \right) = \\ &= 48 - 24 + 4 = 28 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = 28 - 4^2 = 28 - 16 = 12$$

Задача 6. Дана функция распределения вероятностей

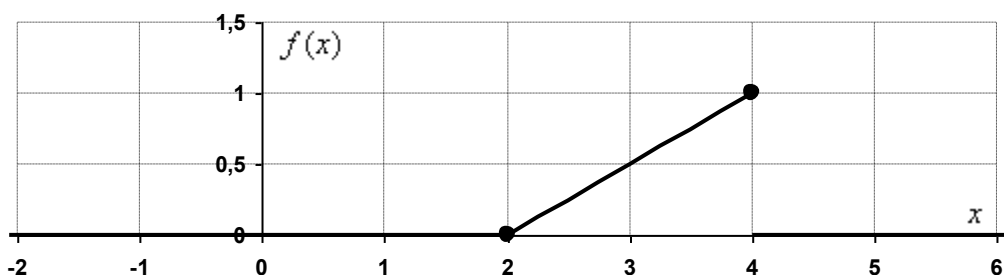
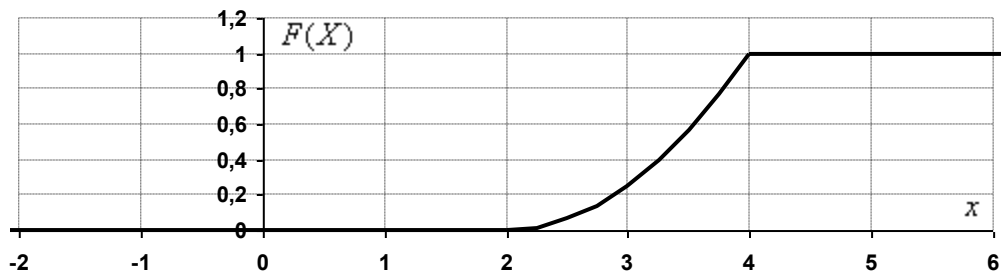
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}(x-2)^2, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найти $f(x)$, $P(3 < X < 4)$, $P(X > 1)$, $P(X < 5)$, $P(2,1 < X < 5)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2), & 2 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$:



Вычислим вероятности попадания случайной величины X в интервалы:

$$P(3 < X < 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{4}(4-2)^2 - \frac{1}{4}(3-2)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 1) = F(+\infty) - F(1) = 1 - 0 = 1$$

$$P(X < 5) = F(5) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

$$P(2,1 < X < 5) = F(5) - F(2,1) = 1 - \frac{1}{4}(2,1-2)^2 = 1 - 0,0025 = 0,9975$$

Задача 7. Задана функция распределения случайной величины X :

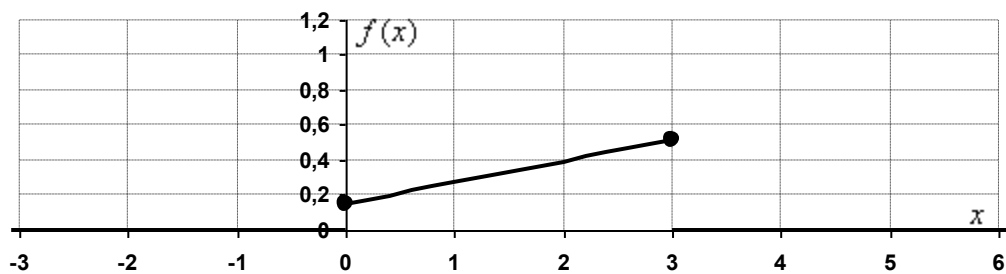
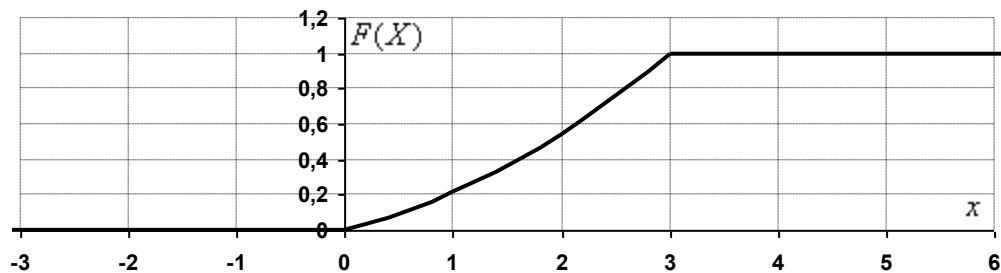
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{33}(2x^2 + 5x), & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1;2]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{33}(4x + 5), & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{33} \int_0^3 x(4x+5)dx = \frac{1}{33} \int_0^3 (4x^2 + 5x)dx =$$

$$= \frac{1}{33} \cdot \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{33} \cdot \left(36 + \frac{45}{2} - 0 \right) = \frac{1}{33} \cdot \frac{117}{2} = \frac{39}{22} \approx 1,77$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \frac{1}{33} \int_0^3 x^2(4x+5)dx - \left(\frac{39}{22} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{33} \int_0^3 (4x^3 + 5x^2)dx - \frac{1521}{484} = \frac{1}{33} \cdot \left(x^4 + \frac{5x^3}{3} \right) \Big|_0^3 - \frac{1521}{484} = \frac{1}{33} \cdot (81 + 45 - 0) - \frac{1521}{484} =$$

$$= \frac{42}{11} - \frac{1521}{484} = \frac{327}{484} \approx 0,676$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[1;2]$.

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{18}{33} - \frac{7}{33} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \text{ – искомая вероятность.}$$

Задача 8. Случайная непрерывная величина X задана своей функцией

$$\text{распределения } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \text{ . Требуется: а) найти плотность распределения}$$

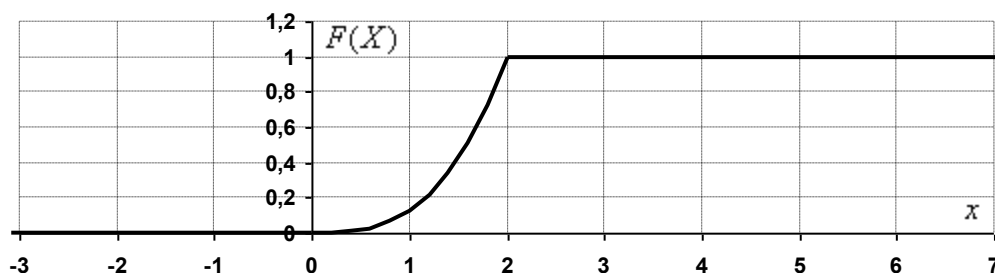
вероятностей $f(x)$; б) схематично построить график функций $F(x)$ и $f(x)$; в) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (1;3)$.

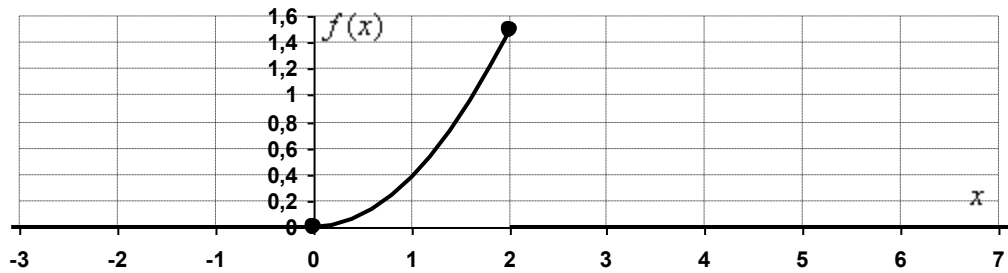
Решение:

а) Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3x^2}{8}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

б) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$:





в) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} (x^4) \Big|_0^2 = \frac{3}{32} \cdot (16 - 0) = \frac{3}{2} = 1,5$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 = \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} (x^5) \Big|_0^2 - \frac{9}{4} = \\ &= \frac{3(32-0)}{40} - \frac{9}{4} = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20} = 0,15 \end{aligned}$$

г) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (1; 3)$:

$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875 \text{ – искомая вероятность.}$$

Задача 9. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{15}(x^4 - 1), & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$ и построить графики данных функций. Вычислить математическое ожидание и медиану x_0 .

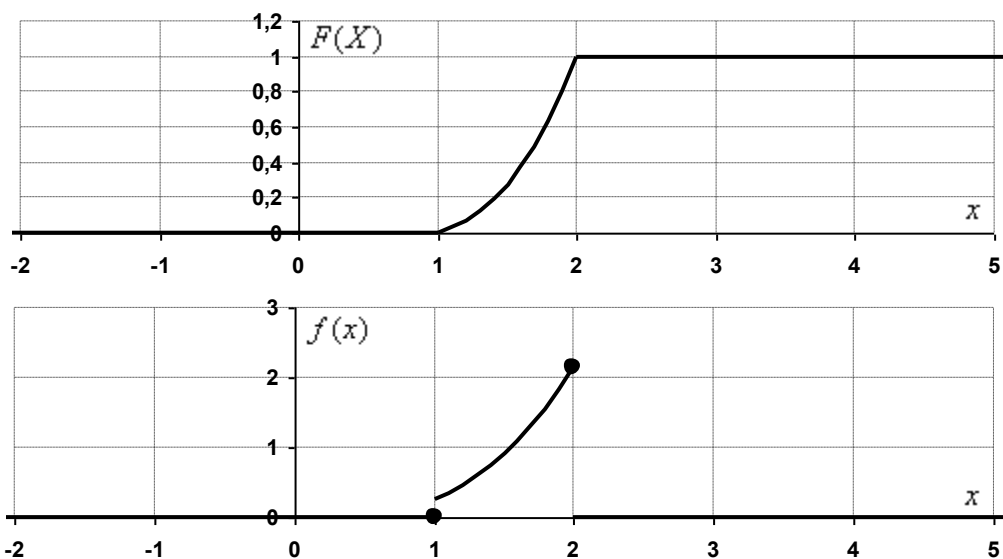
Решение: найдём функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{4x^3}{15}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^2 \left(x \cdot \frac{4x^3}{15} \right) dx = \frac{4}{15} \int_1^2 x^4 dx = \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{5} (x^5) \Big|_1^2 = \frac{4}{75} \cdot (32 - 1) = \frac{4}{75} \cdot 31 = \frac{124}{75} \approx 1,65 \end{aligned}$$

Построим графики:



Медиана непрерывной случайной величины определяется условием $F(x_0) = \frac{1}{2}$, в

данном случае:

$$\frac{1}{15}(x_0^4 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$x_0^4 - 1 = \frac{15}{2}$$

$$x_0^4 = \frac{15}{2} + 1 = \frac{17}{2}$$

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{17}{2}} \approx 1,71$$

Задача 10. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

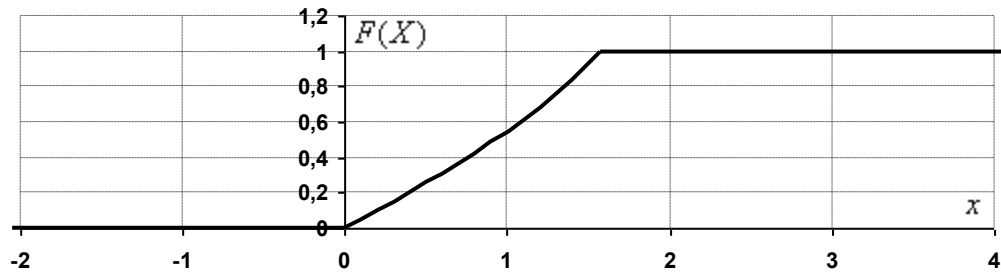
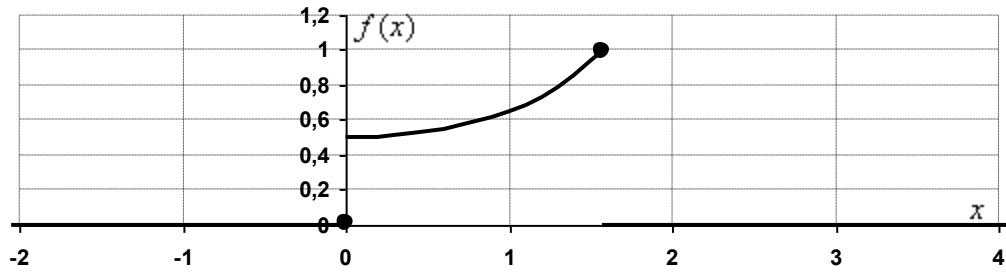
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$ и построить графики данных функций. Вычислить математическое ожидание и найти $p\left(-\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: найдём функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Выполним чертежи:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{xdx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow v = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\begin{aligned} (*) &= \left(x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\left(\cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1 \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \left(\ln 2^{-\frac{1}{2}} - 0 \right) = \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 \right) \approx 0,88 \end{aligned}$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P\left(-\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$$

Задача 11. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sqrt{2} \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

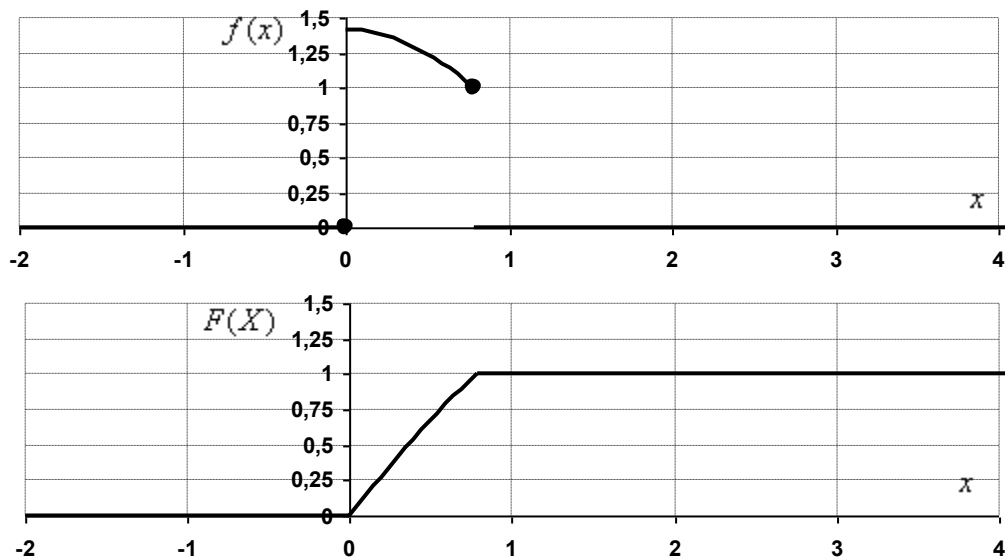
Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; 2) схематично построить графики $f(x)$ и $F(x)$; 3) найти математическое ожидание и дисперсию X .

Решение:

1) Найдем функцию плотности распределения $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sqrt{2} \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



3) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \sqrt{2}x \Rightarrow du = \sqrt{2}dx$$

$$dv = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \sqrt{2}(x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - 0 \right) + \sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} \approx 0,37
 \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = \sqrt{2}x^2 \Rightarrow du = 2\sqrt{2}x dx$$

$$dv = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = \sqrt{2}x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2}{16\sqrt{2}} - 0 \right) - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x = (*)$$

$$u = -2\sqrt{2}x \Rightarrow du = -2\sqrt{2} dx$$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{\pi^2}{16} + 2\sqrt{2}x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{\pi^2}{16} + 2\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 0 \right) - 2\sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} (1 - \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})^2 = \\
 &= \frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - 1 + 2\sqrt{2} - 2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 2\sqrt{2} - 5 \approx 0,05
 \end{aligned}$$

Задача 12. Задана функция распределения случайной величины X :

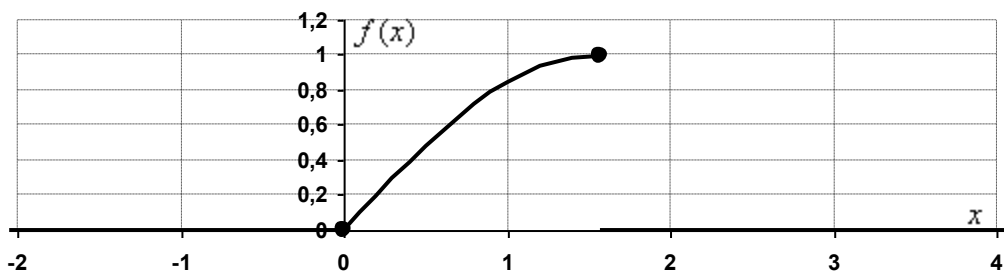
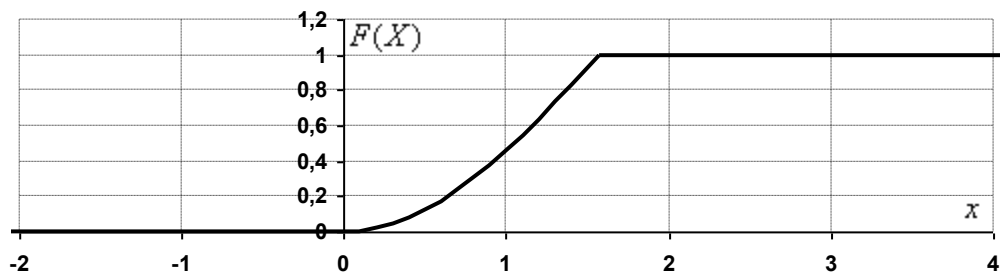
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = -(x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (0 - 0) + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = -(x^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x = -(0 - 0) + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x = (*)$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$(*) = 2(x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi + 2(0 - 1) = \pi - 2$$

Таким образом:

$$D(X) = \pi - 2 - 1^2 = \pi - 3 \approx 0,14$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = 1 - \cos \frac{\pi}{3} - (1 - 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

– искомая вероятность.

Задача 13. Задана функция распределения случайной величины X :

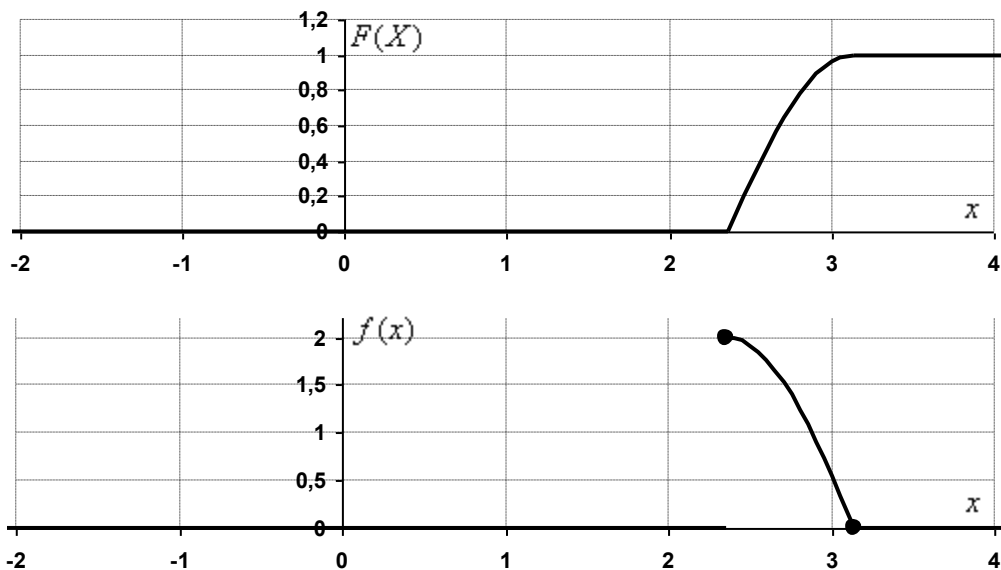
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos 2x, & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{3\pi}{4} \\ -2\sin 2x, & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = -2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x \sin 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = -2\sin 2x \Rightarrow v = \cos 2x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = (x \cos 2x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx = (\pi - 0) - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \pi - \frac{1}{2}(0 + 1) = \pi - \frac{1}{2} \approx 2,64$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = -2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x^2 \sin 2x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = -2 \sin 2x \Rightarrow v = \cos 2x$$

$$(*) = (x^2 \cos 2x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - 2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x \cos 2x = (\pi^2 - 0) - 2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x \cos 2x = (*)$$

$$u = -x \Rightarrow du = -dx$$

$$dv = 2 \cos 2x dx \Rightarrow v = \sin 2x$$

$$\begin{aligned} (*) &= \pi^2 - (x \sin 2x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x dx = \pi^2 - \left(0 + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(1 - 0) = \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \pi^2 - \pi - \frac{1}{2} - \left(\pi - \frac{1}{2}\right)^2 = \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} - \pi^2 + \pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 3}{4} \approx 0,035$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$:

$$P\left(\frac{3\pi}{4} \leq X \leq \frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\frac{5\pi}{6}\right) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,5$$

– искомая вероятность.

2. Задачи, в которых СВ задана функцией плотности

Задача 14. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

Найти C , $M(X)$, $P\left(0 \leq X < \frac{1}{2}\right)$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. В данном случае:

$$C \int_0^2 x^2 dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\int_0^2 x^2 dx}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3)|_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}$$

Таким образом:

$$C = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}(x^4)|_0^2 = \\ &= \frac{3}{32}(16-0) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Найдём:

$$P\left(0 \leq X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \frac{3}{8} \int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}(x^3)|_0^{1/2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}-0\right) = \frac{1}{64} - \text{вероятность того,}$$

что случайная величина X примет значение из данного интервала.

$$\text{Ответ: } C = \frac{3}{8}, M(X) = 1\frac{1}{2} = 1,5, P\left(0 \leq X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} = 0,015625$$

Задача 15. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & x \in [-1;1] \\ 0, & x \notin [-1;1] \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$

Решение: вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (x-x^3)dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2 = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx - 0^2 = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx = \frac{3}{4} \int_{-1/2}^{1/2} (1-x^2)dx = \frac{3}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{16} - \text{вероятность того, что случайная}$$

величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $M(X) = 0$, $D(X) = \frac{1}{5} = 0,2$, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16} = 0,6875$

Задача 16. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Найти C , $M(X)$, $P(2 \leq X < 3)$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \text{ В данном случае:}$$

$$C \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4}}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) \Big|_2^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{2^3} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(0 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{24}$$

Таким образом: $C = \frac{1}{\frac{1}{24}} = 24$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{24}{x^4}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \frac{24}{x^4} dx = 24 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) \Big|_2^b = \\ &= -12 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2^2}\right) = -12 \cdot \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 3 \end{aligned}$$

$$P(2 \leq X < 3) = 24 \int_2^3 \frac{dx}{x^4} = 24 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right) \Big|_2^3 = -8 \cdot \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{8}\right) = -8 \cdot \left(-\frac{19}{216}\right) = \frac{19}{27} -$$

вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $C = 24$, $M(X) = 3$, $P(2 \leq X < 3) = \frac{19}{27} \approx 0,7037$

Задача 17. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ A\sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(2 < X < 3)$

Решение: сначала найдем коэффициент A . По свойству $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ функции

плотности распределения:

$$A \int_1^4 \sqrt{x} dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_1^4 \sqrt{x} dx}$$

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (\sqrt{64} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3} \Rightarrow A = \frac{3}{14}$$

Таким образом, функция плотности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{3}{14} \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

Если $x < 1$, то $f(x) = 0$ и $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $1 \leq x \leq 4$, то $f(x) = \frac{3}{14}\sqrt{x}$ и

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + \frac{3}{14} \int_1^x \sqrt{x} dx = 0 + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^x = \frac{1}{7}(\sqrt{x^3} - 1).$$

Если $x > 4$, то $f(x) = 0$ и:

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + \frac{3}{14} \int_1^4 \sqrt{x} dx + \int_4^x 0 dx = 0 + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} (\sqrt{x^3}) \Big|_1^4 + 0 = \frac{1}{7}(8 - 1) = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{7}(\sqrt{x^3} - 1), & 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 3) &= F(3) - F(2) = \frac{1}{7}(3\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{7}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{7}(3\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2} + 1) = \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{7} \approx 0,34 \text{ – вероятность того, что } X \text{ примет значение из интервала } (2; 3): \end{aligned}$$

Задача 18. Случайная величина X задана плотность распределения

$f(x) = c\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)$ на интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) параметр c ; б) функцию распределения случайной величины X ; с) математическое ожидание и дисперсию величины X .

Решение:

а) Найдем коэффициент c . Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. В данном случае:

$$c \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) dx = 1$$

$$c \left(\frac{1}{2}x^3 + x^2\right) \Big|_0^1 = 1$$

$$c \left(\frac{1}{2} + 1 - 0\right) = 1$$

$$\frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{4}{3}x, & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$$

б) Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$\text{Если } x \leq 0 \text{ то } f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Если } 0 < x < 1, \text{ то } f(x) = x^2 + \frac{4}{3}x$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) dx = 0 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{3}\right) \Big|_0^x = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 - 0) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2)$$

$$\text{Если } x \geq 1 \text{ то } f(x) = 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) dx + \int_1^x 0 dx = 0 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{3}\right) \Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 0 = 1$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2), & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

с) Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{9}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36} \approx 0,7$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{4}{3}x^3\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{3}\right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{8}{15} - \left(\frac{25}{36}\right)^2 = \frac{8}{15} - \frac{625}{1296} \approx 0,05$$

Задача 19. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$\text{вероятностей } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^4 + 2x}{c}, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти c , $M(X)$, $D(X)$, $P(0,5 < X < 2,5)$

Решение: найдем коэффициент c .

По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

В данной задаче:

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 2x}{c} dx = 1$$

$$\frac{1}{c} \int_0^1 (x^4 + 2x) dx = 1$$

$$c = \int_0^1 (x^4 + 2x) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + 1 - 0 - 0 = \frac{6}{5}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{5}{6}(x^4 + 2x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{5}{6}(x^4 + 2x) dx = \frac{5}{6} \int_0^1 (x^5 + 2x^2) dx = \frac{5}{6} \left(\frac{x^6}{6} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - 0 - 0 \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{5}{6}(x^4 + 2x) dx = \frac{5}{6} \int_0^1 (x^6 + 2x^3) dx = \frac{5}{6} \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - 0 - 0 \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{14} = \frac{15}{28} \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия:

$$D(X) = \frac{15}{28} - \left(\frac{25}{36}\right)^2 = \frac{15}{28} - \frac{625}{1296} = \frac{485}{9072} \approx 0,05$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(0,5; 2,5)$:

$$\begin{aligned} P(0,5 < X < 2,5) &= \int_{0,5}^{2,5} f(x)dx = \frac{5}{6} \int_{0,5}^1 (x^4 + 2x)dx + \int_1^{2,5} 0dx = \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{x^5}{5} + x^2 \right) \Big|_{0,5}^1 + 0 = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{160} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{6} \left(\frac{6}{5} - \frac{41}{160} \right) = 1 - \frac{41}{192} = \frac{151}{192} \end{aligned}$$

Ответ: $c = \frac{6}{5}$; $M(X) = \frac{25}{36} \approx 0,7$; $D(X) = \frac{485}{9072} \approx 0,05$; $P(0,5 < X < 2,5) = \frac{151}{192} \approx 0,79$

Задача 20. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} A(x-1), & x \in [2;4] \\ 0, & x \notin [2;4] \end{cases}$$

Требуется:

- 1) найти коэффициент A ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) вычислить вероятности попадания случайной величины X на промежутки $[-5;3]$ и $(3;7)$;
- 5) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение:

- 1) Найдем коэффициент A .

Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

В данном случае:

$$A \int_2^4 (x-1)dx = 1$$

$$\frac{A}{2} (x-1)^2 \Big|_2^4 = 1$$

$$A(9-1) = 2$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1), & x \in [2;4] \\ 0, & x \notin [2;4] \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x < 2$ то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $2 \leq x \leq 4$, то $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \frac{1}{4} \int_2^x (x-1) dx = 0 + \frac{1}{8} (x-1)^2 \Big|_2^x = \frac{(x-1)^2 - 1}{8} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{8} = \frac{x^2 - 2x}{8}$$

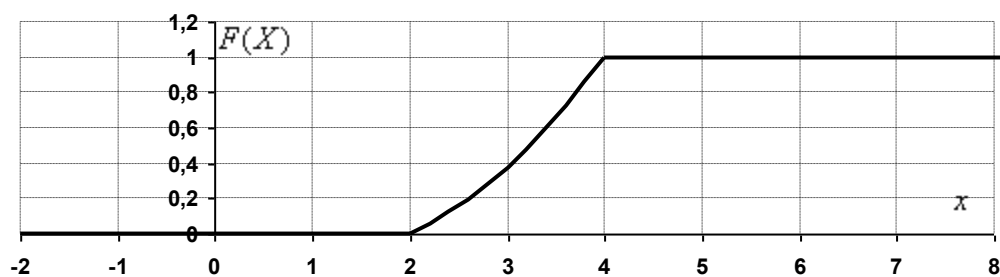
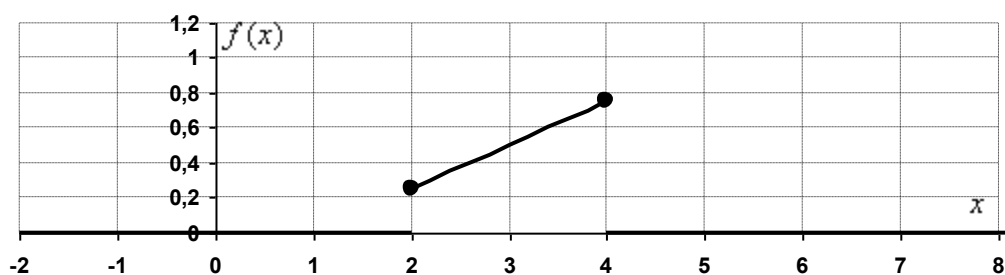
Если $x > 4$ то $f(x) = 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \frac{1}{4} \int_2^4 (x-1) dx + \int_4^x 0 dx = 0 + \frac{1}{8} (x-1)^2 \Big|_2^4 + 0 = \frac{1}{8} (9-1) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 2x}{8}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



4) Вычислим вероятности попадания значений случайной величины X на промежутки $[-5; 3]$ и $(3; 7)$:

$$P(-5 \leq X \leq 3) = F(3) - F(-5) = \frac{9-6}{8} - 0 = 0,375$$

$$P(3 < X < 7) = F(7) - F(3) = 1 - 0,375 = 0,625$$

5) Найдем математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{4} \int_2^4 x(x-1)dx = \frac{1}{4} \int_2^4 (x^2 - x)dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{64}{3} - 8 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{38}{3} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{4} \int_2^4 x^2(x-1)dx = \frac{1}{4} \int_2^4 (x^3 - x^2)dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{4} \left(64 - \frac{64}{3} - 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{124}{3} = \frac{31}{3}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{31}{3} - \left(\frac{19}{6} \right)^2 = \frac{31}{3} - \frac{361}{36} = \frac{11}{36}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0,55$$

Задача 21. Задана случайная непрерывная величина X своей плотностью

$$\text{распределения вероятностей } f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ c(x+4), & -3 \leq x \leq 1. \\ 0, & x > 1 \end{cases} \text{ Требуется:}$$

- 1) определить коэффициент C ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X ;
- 5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha, \beta) = (-2, 0)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент C . По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ Для данной задачи:}$$

$$c \int_{-3}^1 (x+4) dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\int_{-3}^1 (x+4) dx}$$

$$\int_{-3}^1 (x+4) dx = \frac{(x+4)^2}{2} \Big|_{-3}^1 = \frac{1}{2}(25-1) = 12 \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1}{12}(x+4), & -3 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x < -3$, то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $-3 \leq x \leq 1$ то $f(x) = \frac{1}{12}(x+4)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{12} \int_{-3}^x (x+4) dx = 0 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} (x+4)^2 \Big|_{-3}^x = \frac{1}{24} ((x+4)^2 - 1) = \frac{(x+4)^2 - 1}{24}.$$

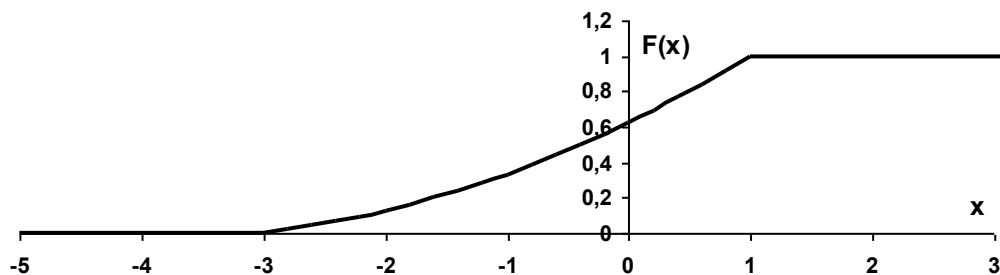
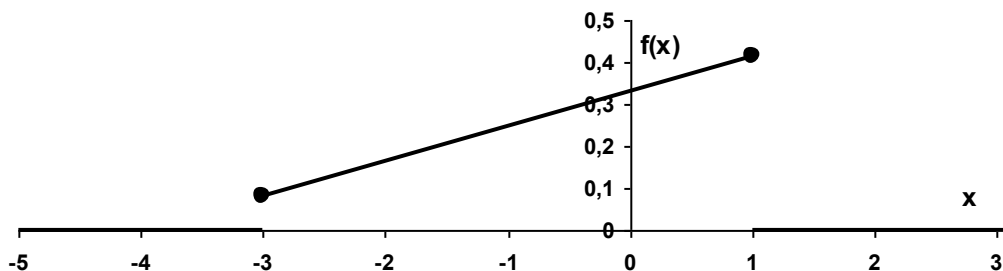
Если $x > 1$, то $f(x) = 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{12} \int_{-3}^1 (x+4) dx + \int_1^x 0 dx = 0 + \frac{1}{24} (x+4)^2 \Big|_{-3}^1 + 0 = \frac{1}{24} (25-1) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{(x+4)^2 - 1}{24}, & -3 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



4) Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{12} \int_{-3}^1 x(x+4)dx = \frac{1}{12} \int_{-3}^1 (x^2 + 4x)dx = \frac{1}{12} \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} + 2 - (-9 + 18) \right) = \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{20}{3} \right) = -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx &= \frac{1}{12} \int_{-3}^1 x^2(x+4)dx = \frac{1}{12} \int_{-3}^1 (x^3 + 4x^2)dx = \frac{1}{12} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \left(\frac{81}{4} - 36 \right) \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{52}{3} = \frac{13}{9} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{13}{9} - \left(-\frac{5}{9} \right)^2 = \frac{13}{9} - \frac{25}{81} = \frac{92}{81} = 1\frac{11}{81} \approx 1,136$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha, \beta) = (-2, 0)$.

$$P(-2 < X < 0) = F(0) - F(-2) = \frac{15}{24} - \frac{3}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} - \text{искомая вероятность.}$$

Задача 22. Непрерывная случайная величина (НСВ) X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -3 \\ a; & -3 < x \leq -1 \\ 3a; & -1 < x \leq 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

Найти значение a и построить график плотности распределения. Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить ее график. Найти числовые характеристики НСВ X – математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Найти вероятность $P(-2 \leq X \leq 0)$.

Решение: найдем значение параметра a . Функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. В данном случае:

$$\begin{aligned} a \int_{-3}^{-1} dx + 3a \int_{-1}^2 dx &= 1 \\ a \cdot (x) \Big|_{-3}^{-1} + 3a \cdot (x) \Big|_{-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$a \cdot (-1 - (-3)) + 3a \cdot (2 - (-1)) = 1$$

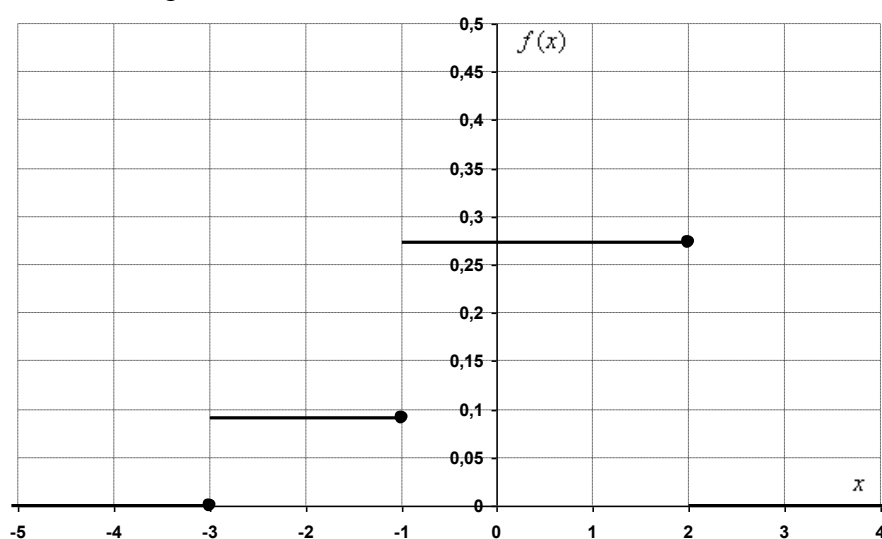
$$2a + 9a = 1$$

$$11a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

Таким образом, функция плотности распределения вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -3 \\ \frac{1}{11}; & -3 < x \leq -1 \\ \frac{3}{11}; & -1 < x \leq 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Составим функцию распределения вероятностей:

$$\text{Если } x \leq -3, \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

$$\text{Если } -3 < x \leq -1, \text{ то } f(x) = \frac{1}{11}, F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{11} \int_{-3}^x dx = 0 + \frac{1}{11} (x) \Big|_{-3}^x = \frac{x+3}{11}$$

$$\text{Если } -1 < x \leq 2, \text{ то } f(x) = \frac{3}{11},$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{11} \int_{-3}^{-1} dx + \frac{3}{11} \int_{-1}^x dx = 0 + \frac{1}{11} (x) \Big|_{-3}^{-1} + \frac{3}{11} (x) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{11} (-1+3) + \frac{3}{11} (x+1) = \\ &= \frac{2+3x+3}{11} = \frac{3x+5}{11} \end{aligned}$$

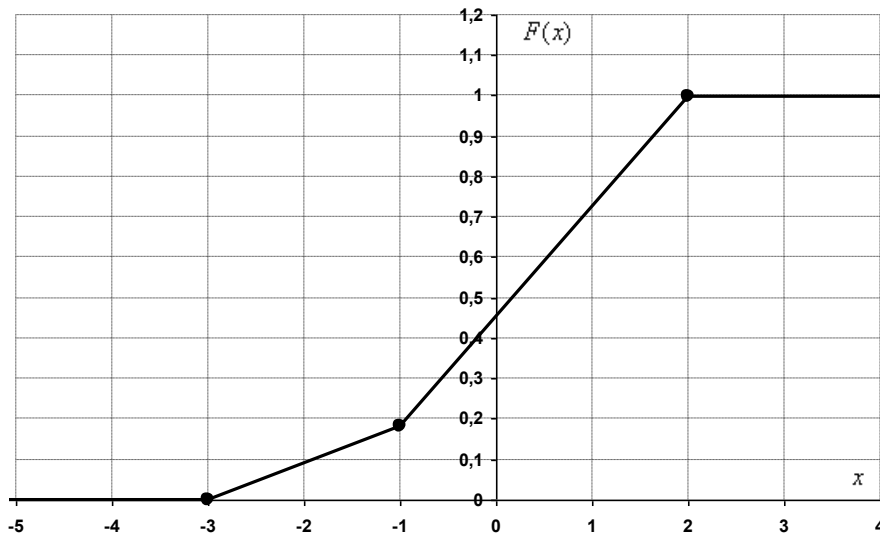
$$\text{Если } x > 2, \text{ то } f(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{11} \int_{-3}^{-1} dx + \frac{3}{11} \int_{-1}^2 dx + \int_2^x 0 dx = 0 + \frac{1}{11} (x) \Big|_{-3}^{-1} + \frac{3}{11} (x) \Big|_{-1}^2 + 0 = \\ &= \frac{1}{11} (-1+3) + \frac{3}{11} (2+1) = \frac{2}{11} + \frac{9}{11} = 1 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -3 \\ \frac{x+3}{11}; & -3 < x \leq -1 \\ \frac{3x+5}{11}; & -1 < x \leq 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{11} \int_{-3}^{-1} x dx + \frac{3}{11} \int_{-1}^2 x dx = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-3}^{-1} + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{22} (1 - 9) + \frac{3}{22} (4 - 1) = -\frac{8}{22} + \frac{9}{22} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \frac{1}{11} \int_{-3}^{-1} x^2 dx + \frac{3}{11} \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-3}^{-1} + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{33} (-1 + 27) + \frac{1}{11} (8 + 1) = \frac{26}{33} + \frac{9}{11} = \frac{53}{33} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{53}{33} - \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{53}{33} - \frac{1}{484} = \frac{2332 - 3}{1452} = \frac{2329}{1452} = 1 \frac{877}{1452}$$

Вычислим $P(-2 \leq X \leq 0) = F(0) - F(-2) = \frac{5}{11} - \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного отрезка.

Задача 23. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases}$$

Требуется:

- 1) Определить коэффициент A ;
- 2) Найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) Схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) Вычислить математическое ожидание и дисперсию X ;
- 5) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b) = (1;2)$

Решение:

1) Найдем коэффициент A . По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \text{ Для данной задачи:}$$

$$A \int_{-3}^3 x^2 dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_{-3}^3 x^2 dx}$$

$$\int_{-3}^3 x^2 dx = 2 \int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (27 - 0) = 18 \Rightarrow A = \frac{1}{18}$$

Таким образом, искомая функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} x^2, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$\text{Если } x < -3, \text{ то } f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Если } -3 \leq x \leq 3, \text{ то } f(x) = \frac{1}{18} x^2,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{18} \int_{-3}^x x^2 dx = 0 + \frac{1}{18} x^3 \Big|_{-3}^x = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} (x^3 - (-27)) = \frac{1}{54} (x^3 + 27).$$

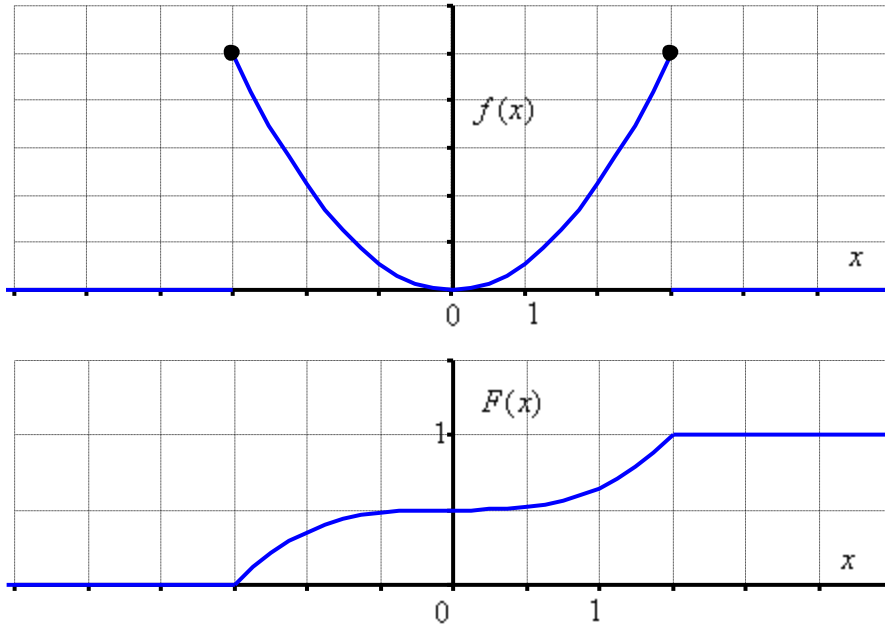
$$\text{Если } x > 3, \text{ то } f(x) = 0,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dx + \frac{1}{18} \int_{-3}^3 x^2 dx + \int_3^x 0 dx = 0 + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-3}^3 + 0 = \frac{1}{54} (27 - (-27)) = \frac{1}{54} \cdot 54 = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1}{54} (x^3 + 27), & -3 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

3) Изобразим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{18} \int_{-3}^3 x^3 dx = 0, \text{ так как подынтегральная функция является}$$

нечетной, интервал интегрирования симметричен относительно нуля.

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \frac{1}{18} \int_{-3}^3 x^4 dx - 0^2 = \frac{1}{18} \cdot 2 \int_0^3 x^4 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^3 = \frac{243}{45} = \frac{27}{5} = 5,4$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(a;b) = (1;2)$:

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{54}(8 + 27) - \frac{1}{54}(1 + 27) = \frac{35}{54} - \frac{28}{54} = \frac{7}{54} \approx 0,13$$

Задача 24. Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ Ax^4, & -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Требуется:

- 1) Определить коэффициент A ;
- 2) Найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) Схематично построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
- 4) Найти математическое ожидание и дисперсию X ;
- 5) Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (0,5;1)$

Решение:

- 1) Найдем коэффициент A . По свойству $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ функции плотности:

$$A \int_{-1}^1 x^4 dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_{-1}^1 x^4 dx = 1}$$

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = 1 = \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{5} (1 - (-1)) = \frac{2}{5} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{5}{2} x^4, & -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$\text{Если } x < -1 \text{ то } f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Если } -1 \leq x \leq 1, \text{ то } f(x) = \frac{5}{2} x^4, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \frac{5}{2} \int_{-1}^x x^4 dx = 0 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2} (x^5 + 1).$$

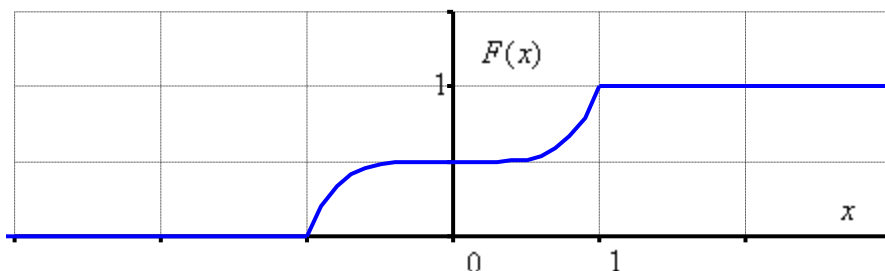
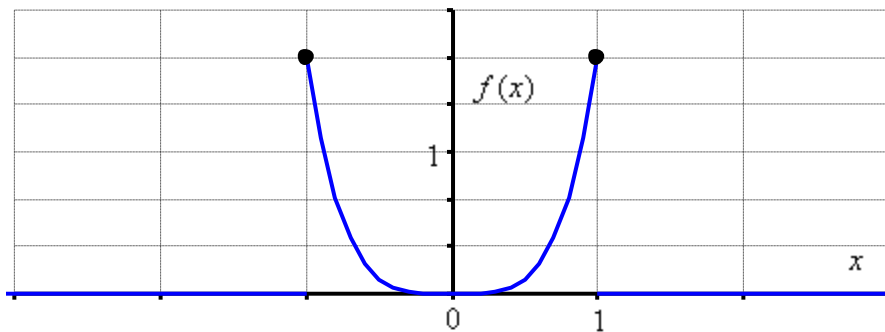
Если $x > 1$ то $f(x) = 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx + \int_1^x 0 dx = 0 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 + 0 = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2} (x^5 + 1), & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x \cdot x^4 dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{12}(1-1) = 0$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^4 dx - 0^2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} x^7 \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{14}(1+1) = \frac{5}{7} \approx 0,71$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (0,5; 1)$:

$$P(0,5 < X < 1) = F(1) - F(0,5) = \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{2}(0,5^5 + 1) = 1 - 0,515625 = 0,484375$$

Задача 25. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} A \sin 2x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Требуется:

- 1) Определить коэффициент A ;
- 2) Найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) Схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) Вычислить математическое ожидание и дисперсию X ;
- 5) Определить вероятность попадания в интервал $(a; b) = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент A . По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \text{ Для данной задачи:}$$

$$A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{1} = 1$$

Таким образом, функция плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x < 0$, то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

Если $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $f(x) = \sin 2x$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \sin 2x dx = 0 - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^x = -\frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 0) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \sin^2 x.$$

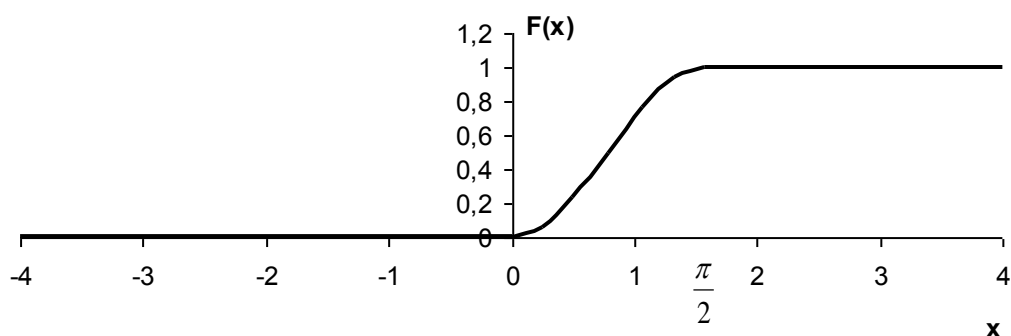
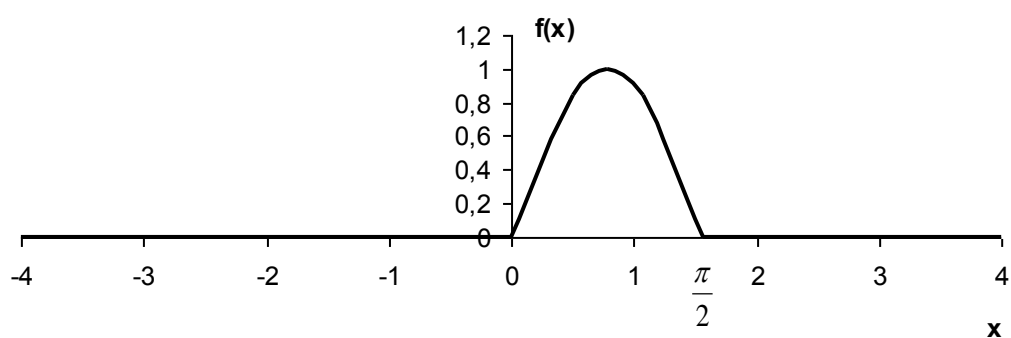
Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $f(x) = 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dx = 0 - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3) Изобразим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



4) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \cos \pi - 0 \right) + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 0 = \frac{\pi}{4}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin 2x \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$(*) = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{4} - 0 \right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = (*)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{8} + 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом: } D(X) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

5) Найдем вероятность попадания в интервал $(a; b) = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right)$:

$$P\left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \right) = F\left(\frac{\pi}{6} \right) - F\left(-\frac{\pi}{6} \right) = \sin^2 \frac{\pi}{6} - 0 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Задача 26. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$\text{вероятностей: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ -2 \cos 2x, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить графики данных функций.

Вычислить математическое ожидание и найти $P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right)$.

Решение: найдем функцию распределения $F(x)$:

1) Если $x < \frac{\pi}{4}$, то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

2) Если $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$, то $f(x) = -2 \cos 2x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos 2x dx = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^x = -\left(\sin 2x - \sin \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin 2x.$$

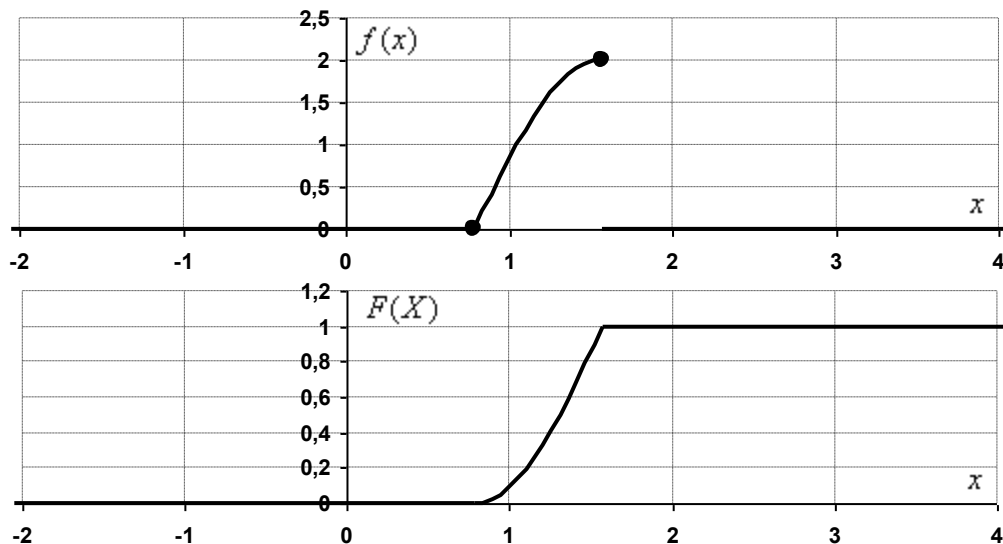
3) Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $f(x) = 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dx = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = -\left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 - \sin 2x, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Выполним чертежи:



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = -2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx$$

$$dv = \cos 2x \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\begin{aligned} (*) &= -(x \sin 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx = -\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{\pi}{4} \cdot 1\right) - \frac{1}{2} (\cos 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1 - 0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi + 2}{4} \approx 1,285 \end{aligned}$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

3. Равномерное распределение случайной величины

Задача 27. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2;8]$. Найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(3;5)$.

Решение: составим функцию плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{(8-2)}, & 2 \leq x \leq 8 \\ 0, & x > 8 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{6}, & 2 \leq x \leq 8 \\ 0, & x > 8 \end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(3 < X < 5) = \int_3^5 f(x) dx = \frac{1}{6} \int_3^5 dx = \frac{1}{6} \cdot (x) \Big|_3^5 = \frac{1}{6} \cdot (5-3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Ответ: $\frac{1}{3} \approx 0,33$

Задача 28. Случайная непрерывная величина X задана своей функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$. Требуется: а) найти плотность распределения

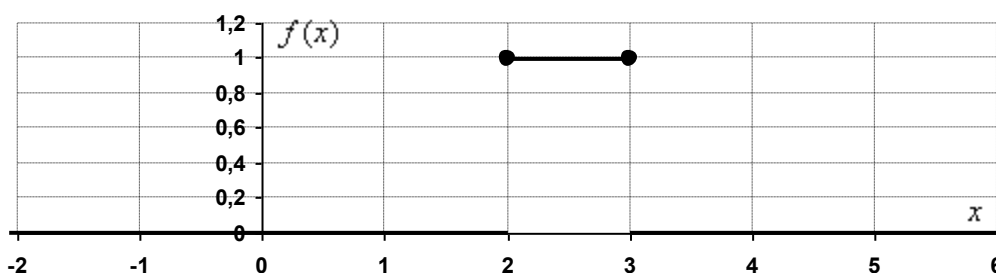
вероятностей $f(x)$; б) схематично построить график функций $f(x)$ и $F(x)$; в) Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; г) Определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (1;3)$.

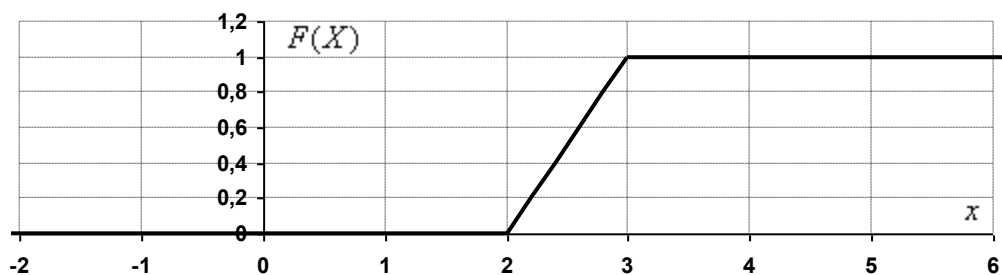
Решение:

а) Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

б) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





в) Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^3 xdx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_2^3 x^2 f(x)dx = \int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3)\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(27-8) = \frac{19}{3}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{19}{3} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{19}{3} - \frac{25}{4} = \frac{1}{12}$$

г) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (1; 3)$.

$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - 0 = 1 - \text{искомая вероятность.}$$

Задача 29. Задана функция распределения случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{5}(x+1), & c \leq x \leq d \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найти значения c, d , плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0; 3]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: в силу непрерывности функции распределения:

$$F(c) = \frac{1}{5}(c+1) = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$F(d) = \frac{1}{5}(d+1) = 1 \Rightarrow d = 4$$

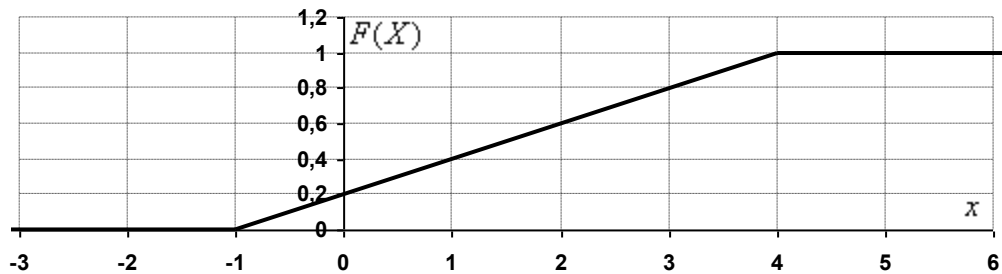
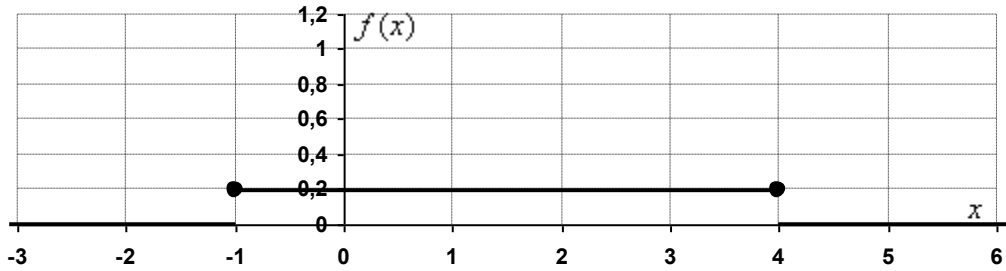
Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{5}(x+1), & -1 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{5}, & -1 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 x dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-1}^4 = \frac{1}{10} \cdot (16 - 1) = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 x^2 dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-1}^4 - \frac{9}{4} = \frac{1}{15} (64 + 1) - \frac{9}{4} = \frac{13}{3} - \frac{9}{4} = \frac{25}{12} \approx 2,083 \end{aligned}$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;3]$:

$$P(0 \leq X \leq 3) = F(3) - F(0) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ – искомая вероятность.}$$

Задача 30. Равномерно распределенная непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией (плотностью вероятности):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & x \in (-5; 11) \\ 0, & x \notin (-5; 11) \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию распределения $F(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ; в) $P(-6 < x < 7)$.

Решение:

а) Найдем функцию распределения $F(x)$:

$$\text{Если } x \leq -5 \text{ то } f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Если } -5 < x < 11 \text{ то } f(x) = \frac{1}{16} \text{ и } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \frac{1}{16} \int_{-5}^x dx = 0 + \frac{1}{16} (x) \Big|_{-5}^x = \frac{1}{16} (x + 5)$$

Если $x \geq 11$ то $f(x) = 0$, следовательно:

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \frac{1}{16} \int_{-5}^{11} dx + \int_{11}^x 0 dx = 0 + \frac{1}{16} (x) \Big|_{-5}^{11} + 0 = \frac{1}{16} \cdot (11 + 5) = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ \frac{1}{16} (x + 5), & -5 < x < 11 \\ 1, & x \geq 11 \end{cases}$$

б) Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{16} \int_{-5}^{11} x dx = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-5}^{11} = \frac{1}{32} \cdot (121 - 25) = \frac{1}{32} \cdot 96 = 3$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{16} \int_{-5}^{11} x^2 dx = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-5}^{11} = \frac{1}{48} \cdot (1331 + 125) = \frac{1456}{48} = \frac{91}{3}$$

Таким образом:

$$D(X) = \frac{91}{3} - 3^2 = \frac{91}{3} - 9 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

в) Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(-6 < X < 7) = F(7) - F(-6) = \frac{1}{16} (7 + 5) - 0 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Задача 31. Найдите c , $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(0 < X < 7)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{c-10}, & x \in [6;9], \\ 0, & x \notin [6;9]. \end{cases}$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. В данном случае:

$$\int_6^9 \frac{1}{c-10} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c-10} (x) \Big|_6^9 = 1 \Rightarrow \frac{9-6}{c-10} = 1 \Rightarrow c-10 = 3 \Rightarrow c = 13$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [6;9], \\ 0, & x \notin [6;9]. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{3} \int_6^9 x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_6^9 = \frac{1}{6} (81 - 36) = \frac{1}{6} \cdot 45 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \frac{1}{3} \int_6^9 x^2 dx - (7,5)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_6^9 - 56,25 = \\ &= \frac{(729 - 216)}{9} - 56,25 = 57 - 56,25 = 0,75 \end{aligned}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

$$\text{Если } x < 6, \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{Если } 6 \leq x \leq 9, \text{ то } f(x) = \frac{1}{3}, F(x) = \int_{-\infty}^6 0 dx + \frac{1}{3} \int_6^x dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_6^x = \frac{x-6}{3}.$$

$$\text{Если } x > 9, \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^6 0 dx + \frac{1}{3} \int_6^9 dx + \int_9^x 0 dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_6^9 + 0 = \frac{1}{3} (9-6) = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ \frac{x-6}{3}, & 6 \leq x \leq 9 \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(0 < X < 7) = F(7) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Задача 32. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , распределенной равномерно в интервале $(2;8)$. Найти и построить графики функции распределения и плотности распределения равномерной непрерывной случайной величины X .

Решение: составим функцию плотности распределения случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{8-2}, & 2 < x < 8 \\ 0, & x \geq 8 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{6}, & 2 < x < 8 \\ 0, & x \geq 8 \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{6} \int_2^8 x dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_2^8 = \frac{1}{12} (64 - 4) = \frac{60}{12} = 5$$

Вычислим дисперсию:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 = \frac{1}{6} \int_2^8 x^2 dx - 5^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_2^8 - 25 = \\ = \frac{1}{18} (512 - 8) - 25 = \frac{504}{18} - 25 = 28 - 25 = 3$$

Найдем функцию распределения $F(x)$:

$$\text{Если } x \leq 2 \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

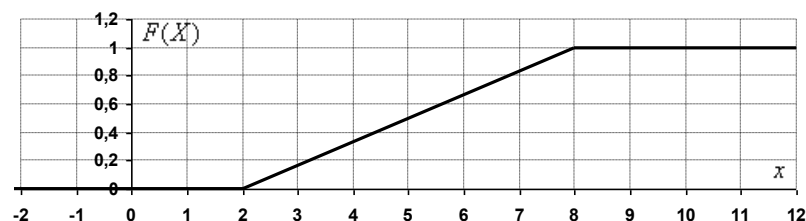
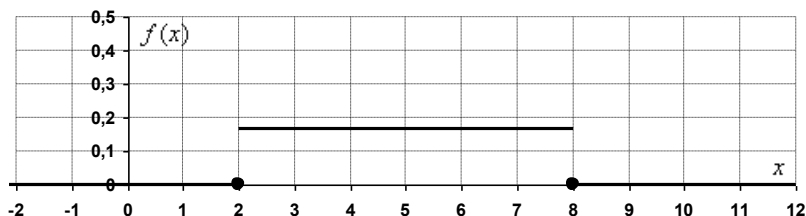
$$\text{Если } 2 < x < 8 \text{ то } f(x) = \frac{1}{6}, F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \frac{1}{6} \int_2^x dx = 0 + \frac{1}{6} (x) \Big|_2^x = \frac{1}{6} (x - 2).$$

$$\text{Если } x \geq 8, \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^2 0 dx + \frac{1}{6} \int_2^8 dx + \int_8^x 0 dx = 0 + \frac{1}{6} (x) \Big|_2^8 + 0 = \frac{1}{6} (8 - 2) = 1.$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{6} (x - 2), & 2 < x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$$

Выполним чертежи:



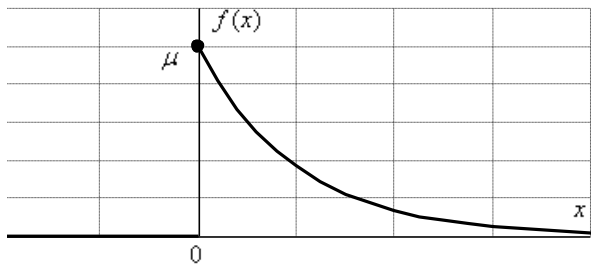
4. Показательное распределение вероятностей

Задача 33. Случайная величина X подчинена показательному закону с параметром μ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mu e^{-\mu x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Построить кривую распределения. Найти функцию распределения. Найти вероятность того, что случайная величина X примет меньшее значение, чем ее математическое ожидание.

Решение: построим кривую плотности распределения:



Найдем функцию распределения:

$$\text{Если } x < 0, \text{ то } f(x) = 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Если $x > 0$, то $f(x) = \mu e^{-\mu x}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \mu \int_0^x e^{-\mu x} dx = 0 - \mu \cdot \frac{1}{\mu} (e^{-\mu x}) \Big|_0^x = -(e^{-\mu x} - 1) = 1 - e^{-\mu x}$$

Таким образом, функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина X примет меньшее значение, чем ее математическое ожидание.

Из теории известно, что функция плотности показательного распределения заданная в виде $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mu e^{-\mu x}, & x \geq 0 \end{cases}$ имеет математическое ожидание $M(x) = \frac{1}{\mu}$.

Таким образом:

$$P\left(-\infty < x < \frac{1}{\mu}\right) = F\left(\frac{1}{\mu}\right) - F(0) = 1 - e^{-\mu \cdot \frac{1}{\mu}} - (1 - 1) = 1 - e^{-1}$$

$$\text{Ответ: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad P\left(-\infty < x < \frac{1}{\mu}\right) = 1 - e^{-1}$$

Задача 34. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ae^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Требуется:

- 1) определить коэффициент A ;
- 2) найти функцию распределения $F(x)$;
- 3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- 4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X ;
- 5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(a; b) = (1; +\infty)$.

Решение:

1) Найдем коэффициент A . По свойству функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

В данной задаче:

$$A \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-2x}) \Big|_0^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-2b} - e^0) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$$

Таким образом, функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$\text{Если } x < 0, \text{ то } f(x) = 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

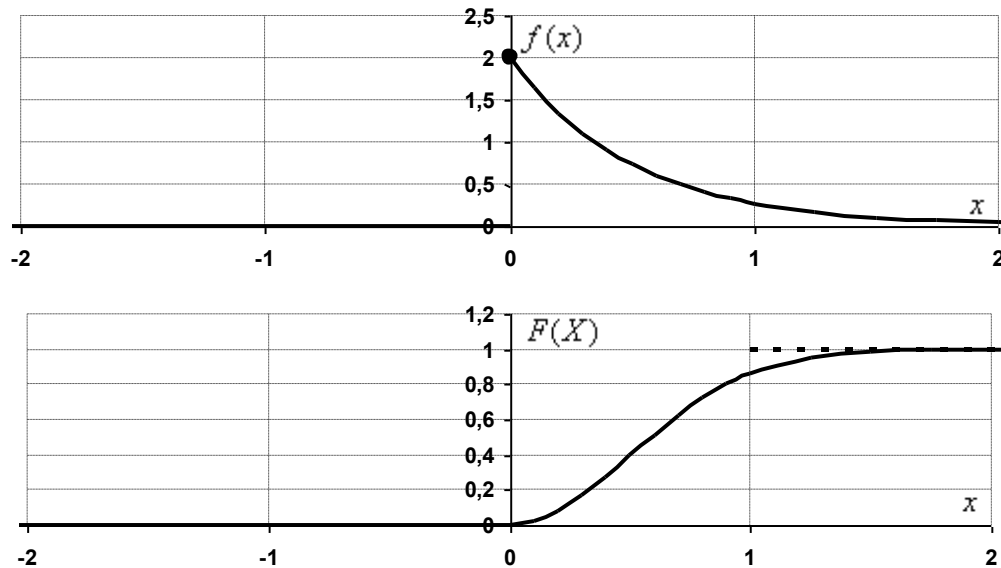
Если $x \geq 0$, то $f(x) = e^{-2x}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + 2 \int_0^x e^{-2x} dx = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} (e^{-2x}) \Big|_0^x = -(e^{-2x} - 1) = 1 - e^{-2x}.$$

Таким образом, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

3) Построим графики $f(x)$ и $F(x)$:



4) Найдём математическое ожидание и дисперсию.

Способ первый, готовые формулы: из теории известно, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределённой случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ равны: } M(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Способ второй, прямые вычисления.

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$$

Сначала найдем неопределенный интеграл:

$$2 \int xe^{-2x} dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = 2e^{-2x} dx \Rightarrow v = -e^{-2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -xe^{-2x} + \int e^{-2x} dx = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} = -\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}$$

Таким образом, математическое ожидание:

$$M(X) = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((2x+1)e^{-2x} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2b+1)}{e^{2b}} - 1 \right) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{(2b+1)}{e^{2b}} \right) \rightarrow 0 \text{ т.к. показательная функция более высокого порядка роста)}$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$$

Сначала вычислим неопределенный интеграл:

$$2 \int x^2 e^{-2x} dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = 2e^{-2x} dx \Rightarrow v = -e^{-2x}$$

$$(*) = -x^2 e^{-2x} + 2 \int x e^{-2x} dx = -x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} (2x+1) e^{-2x} = -\frac{1}{2} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x}$$

Несобственный интеграл:

$$2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2b^2 + 2b + 1)}{e^{2b}} - 1 \right) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{2b^2 + 2b + 1}{e^{2b}} \rightarrow 0 \right)$, так как показательная функция более высокого порядка роста, чем квадратичная)

Таким образом, дисперсия:

$$D(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

5) Вычислим вероятность того, что X примет значение из интервала $(a; b) = (1; +\infty)$

$$P(1 < X < +\infty) = F(+\infty) - F(1) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} \approx 0,135 - \text{искомая вероятность.}$$

5. Нормальное распределение вероятностей

Задача 35. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 10$ и дисперсией $D(X) = 4$. Найти вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(12; 14)$.

Решение: вычислим среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$
Используем формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) \text{ – функция Лапласа, её значения}$$

находим по соответствующей таблице.

В данном случае:

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) \approx 0,4772 - 0,3413 = 0,1359 -$$

вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(12; 14)$.

Ответ: $P(12 < X < 14) \approx 0,1359$

Задача 36. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,3$. Найти вероятность отклонения случайной величины X от своего математического ожидания по абсолютной величине, меньше, чем $0,4$.

Решение: Используем формулу:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В данной задаче:

$$P(|X - 2| < 0,4) = 2\Phi\left(\frac{0,4}{0,3}\right) = 2\Phi(1,33) \approx 2 \cdot 0,4082 = 0,8165 - \text{вероятность того, что}$$

X отклонится по модулю от своего математического ожидания не более чем на $0,4$.

Ответ: $P(|X - 2| < 0,4) \approx 0,8165$

Задача 37. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине $3,6$ мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

Решение: рассмотрим случайную величину X – отклонение фактического размера изделия от номинального значения.

По условию, $\sigma = 3$, и поскольку систематические отклонения отсутствуют, то математическое ожидание отклонения равно нулю: $a = 0$

Используем формулу:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) - \text{ функция Лапласа}$$

В данном случае $\delta = 3,6$:

$$P(|X| < 3,6) = 2\Phi\left(\frac{3,6}{3}\right) = 2\Phi(1,2) \approx 2 \cdot 0,3849 = 0,7698 \approx 0,77 - \text{вероятность того, что}$$

изделие – высшего качества.

Таким образом, среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных:
 $0,77 \cdot 100 = 77$

Ответ: 77

Задача 38. Заданы математическое ожидание $m = 9$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины X . Найти:

1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta) = (9; 18)$;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|x - m|$ окажется меньше $\delta = 6$.

Решение:

1) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta) = (9; 18)$

Используем формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) - \text{ функция Лапласа, значения}$$

данной функции находим по соответствующей таблице.

В данном случае:

$$P(8 < X < 18) \approx \Phi\left(\frac{18 - 9}{3}\right) - \Phi\left(\frac{9 - 9}{3}\right) = \Phi(3) - \Phi(0) \approx 0,4987 - 0 = 0,4987 - \text{искомая}$$

вероятность.

2) Используем формулу:

$$P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В данном случае:

$$P(|X - 9| < 6) = 2\Phi\left(\frac{6}{3}\right) = 2\Phi(2) \approx 2 \cdot 0,47725 = 0,9545 - \text{вероятность того, что}$$

значение X отклонится по модулю от $m = 9$ не более чем на $\delta = 6$.

Ответ: 1) $\approx 0,4987$ 2) $\approx 0,9545$

Задача 39. Написать функцию плотности нормального распределения случайной величины X , если известно, что $M(X) = 2$ и $D(X) = 5$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 7)$

Решение: функция плотности случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } a \text{ – математическое ожидание, } \sigma \text{ – среднее}$$

квадратическое отклонение. В данном случае:

$$a = M(X) = 2, \quad \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5}$$

Таким образом, искомая функция:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{10}}$$

Найдем вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 7)$. Используем формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) \text{ – функция Лапласа.}$$

В данном случае:

$$P(1 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-2}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(2,24) - \Phi(-0,45) = \Phi(2,24) + \Phi(0,45) \approx \\ \approx 0,4875 + 0,1736 = 0,6611 \text{ – искомая вероятность.}$$

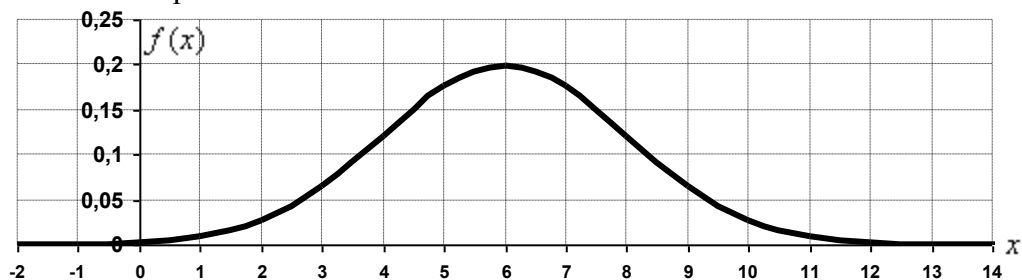
Задача 40. Заданы математическое ожидание $a = 6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины X . Написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график. Применяя правило «трех сигм», найти значения случайной величины X .

Решение: функция плотности распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

В данной задаче:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$$

Выполним чертёж:



Практически достоверным является тот факт, что случайная величина X примет значение, которое отклоняется по модулю от математического ожидания, не более чем на 3σ . Соответствующий интервал значений случайной величины:

$$a - 3\sigma < X < a + 3\sigma$$

$$6 - 3 \cdot 2 < X < 6 + 3 \cdot 2$$

$$0 < X < 12$$

Задача 41. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2 . Найти эти параметры, если известно, что вероятности $P(X < 1) = 0,5$ и $P(-2 < X < 4) = 0,9973$.

Решение: график нормально распределенной случайной величины симметричен относительно своего математического ожидания, и справедливыми являются вероятности: $P(X < a) = 0,5$ и $P(X > a) = 0,5$.

В данном случае $P(X < 1) = 0,5$, таким образом, $a = 1$

Согласно правилу трёх сигм: $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973$

В данном случае:

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = 0,9973$$

$$P(1 - 3\sigma < X < 1 + 3\sigma) = 0,9973$$

$$1 - 3\sigma = -2$$

$$1 + 3\sigma = 4$$

Таким образом: $\sigma = 1$

Ответ: $a = 1$, $\sigma^2 = 1$

Задача 42. Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{x^2 + 4x - 4}{18}}$$

Найти ее математическое ожидание, дисперсию, построить кривую вероятности. Найти вероятности событий: A – случайная величина примет только отрицательные значения, B – случайная величина попадет в интервал длиной в три средних квадратических отклонения, симметричный относительно математического ожидания.

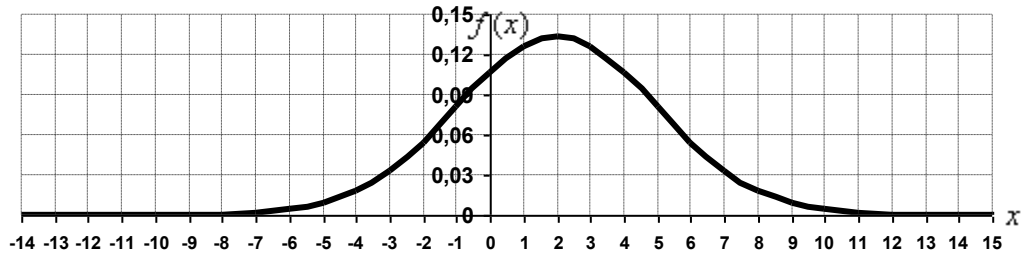
Решение: преобразуем функцию плотности распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 2\pi}} e^{-\frac{x^2 - 4x + 4}{2 \cdot 9}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 3^2}}$$

Данная функция имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, а значит, случайная величина X

распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$.

Выполним чертеж:



Найдем вероятность события A – случайная величина примет только отрицательные значения. Используем формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ и таблицу значений функции Лапласа:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(-\infty < X < 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-2}{3}\right) = \Phi(-0,67) - \Phi(-\infty) = \\ &= -\Phi(0,67) + \Phi(\infty) \approx -0,2486 + 0,5 = 0,2514 \end{aligned}$$

Найдем вероятность события B – случайная величина попадет в интервал длиной в три средних квадратических отклонения, симметричный относительно математического ожидания:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(2 - 3 \cdot 3 < X < 2 + 3 \cdot 3) = P(-7 < X < 11) = \Phi\left(\frac{11-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-7-2}{3}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,4987 = 0,9973 \end{aligned}$$

Ответ: $a = 2$, $\sigma^2 = 9$, $P(A) \approx 0,2514$, $P(B) \approx 0,9973$

Задача 43. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-4x^2 - 6x - 1}$. Найти γ , математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X , вероятность выполнения неравенства $-\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{1}{4}$.

Решение: преобразуем показатель функции:

$$-4x^2 - 6x - 1 = -4\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) - 1 + \frac{9}{4} = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} = -\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{5}{4}$$

Таким образом, функция плотности приводима к виду $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, а

значит, случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ .

В данном случае:

$$f(x) = \gamma e^{-4x^2 - 6x - 1} = \gamma e^{-\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{5}{4}} = \gamma e^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Очевидно, что $M(X) = -\frac{3}{4}$ и $D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{8}$.

Найдём значение параметра γ :

$$\gamma e^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{5}{4}}, \text{ таким образом, функция плотности:}$$

$$f(x) = \gamma e^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Запишем функцию распределения вероятностей:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{5}{4}} \int_{-\infty}^x e^{-4x^2 - 6x - 1} dx.$$

Найдём вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала. Используем формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) \text{ – функция Лапласа, её значения}$$

найдем по соответствующей таблице.

В данном случае:

$$P\left(-\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) = \Phi(2\sqrt{2}) - \Phi(0) \approx 0,4977 - 0 = 0,4977$$

– вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{5}{4}}$, $M(X) = -\frac{3}{4}$, $D(X) = \frac{1}{8}$, $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{5}{4}} \int_{-\infty}^x e^{-4x^2 - 6x - 1} dx$,

$$P\left(-\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{1}{4}\right) \approx 0,4977.$$