

Формулы векторов

Основные формулы

Формулы скалярного произведения

Формулы векторного произведения

Формулы смешанного произведения

Формулы перехода к новому базису и к новой системе координат

1. Координаты вектора по двум точкам

Для точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ плоскости:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1), \quad \overrightarrow{BA}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

Для точек $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ пространства:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{BA}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

То есть из координат *конца* вектора нужно вычесть соответствующие координаты *начала* вектора.

2. Условие коллинеарности векторов

Для того чтобы два вектора были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

Для векторов $\vec{v}(v_1; v_2)$, $\vec{w}(w_1; w_2)$ плоскости: $v_1 = \lambda w_1, \quad v_2 = \lambda w_2$.

Для векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$ пространства: $v_1 = \lambda w_1, \quad v_2 = \lambda w_2, \quad v_3 = \lambda w_3$

Если общего множителя λ не существует, значит, векторы неколлинеарны.

3. Формула длины вектора

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ – для вектора $\vec{v}(v_1; v_2)$ плоскости, заданного в ортонормированном базисе,

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ – аналогично для вектора $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ пространства.

4. Единичные векторы, коллинеарные данному

Вектор $\vec{v}_0$ единичной длины, *сонаправленный* с вектором $\vec{v}(v_1; v_2)$ (*базис ортонормированный*),

имеет координаты $\vec{v}_0\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v}_0\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right)$. Для вектора $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ пространства:

$\vec{v}_0\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v}_0\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\right)$. Кроме того, есть *противоположно*

направленный единичный вектор $-\vec{v}_0$ с координатами противоположных знаков.

5. Формулы сложения и умножения векторов

Для векторов $\vec{v} = (v_1; v_2)$, $\vec{w} = (w_1; w_2)$ плоскости:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1; v_2 + w_2), \quad \lambda \vec{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2), \text{ где } \lambda - \text{любое действительное число.}$$

И для векторов $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w} = (w_1; w_2; w_3)$ пространства:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1; v_2 + w_2; v_3 + w_3), \quad \lambda \vec{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3).$$

6. Определение и формула скалярного произведения

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$, где $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ – длины векторов, а $\angle(\vec{a}; \vec{b})$ – угол между ними.

7. Формула угла между векторами

следует из предыдущего пункта: $\cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

8. Скалярный квадрат вектора

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, откуда следует, что $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

9. Формулы скалярного произведения в координатах

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ – для векторов $\vec{v}(v_1; v_2)$, $\vec{w}(w_1; w_2)$, заданных в ортонормированном базисе, и
 $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ – для векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$ пространства.

10. Формулы косинуса угла в координатах ортонормированного базиса

$\cos \angle(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$, $\cos \angle(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$

11. Условие ортогональности (перпендикулярности) векторов

Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Если они заданы в ортонормированном базисе, то правую часть можно расписать так:

$v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$ – для векторов $\vec{v}(v_1; v_2)$, $\vec{w}(w_1; w_2)$ плоскости и

$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$ – для векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$ пространства.

12. Формула ортогональной проекции вектора на вектор

$Pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ – проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Если векторы $\vec{v}(v_1; v_2)$, $\vec{w}(w_1; w_2)$ заданы в ортонормированном базисе, то формулу можно

расписать так: $Pr_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$. И для пространственных векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$

аналогично: $Pr_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$

13. Направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе

– это есть в точности его проекции на координатные оси декартовой системы координат:

$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$, $\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$ для «плоского» вектора $\vec{v}(v_1; v_2)$ и

$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$, $\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$, $\cos \gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$ – для вектора $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ пространства.

14. Векторное произведение векторов и его длина

Векторное произведение неколлинеарных векторов $[\vec{a} \times \vec{b}]$ – это есть вектор $\vec{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$; вектор $\vec{N}$ перпендикулярен этим векторам и направлен так, что базис $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{N})$ имеет правую ориентацию.

Длина векторного произведения:

$$|\vec{N}| = |[\vec{a} \times \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}), \text{ где } |\vec{a}|, |\vec{b}| - \text{длины векторов, а } \angle(\vec{a}; \vec{b}) - \text{угол между ними.}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{N} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{0}$, $|\vec{N}| = 0$.

15. Формула площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$S_{\Pi} = |[\vec{a} \times \vec{b}]|$, по определению векторного произведения (см. предыдущий пункт).

16. Формула площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Pi} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{a} \times \vec{b}]| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

17. Формула векторного произведения векторов в координатах

Векторное произведение векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, выражается формулой:

$$[\vec{v} \times \vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

18. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$ некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в данном порядке – это есть объём p параллелепипеда, построенного на данных векторах, снабжённый знаком «+», если базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правый, и знаком «-», если базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левый.

Смешанное произведение компланарных векторов $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$.

19. Формула объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$V_{\Pi} = |p|$, по определению смешанного произведения (см. предыдущий пункт).

20. Формула объёма тетраэдра (треугольной пирамиды), построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V_T = \frac{1}{6} |p|$$

21. Смешанное произведение векторов $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\vec{w}(w_1; w_2; w_3)$, $\vec{s}(s_1; s_2; s_3)$ в координатах

$$p = (\vec{v} \cdot \vec{w} \cdot \vec{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} - \text{базиса } (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}), \quad p = (\vec{v} \cdot \vec{w} \cdot \vec{s}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3), \text{ если векторы}$$

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{s}$ имеют координаты произвольного аффинного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

22. Формулы перехода к новому базису**1) Двумерный случай**

Рассмотрим два произвольных аффинных базиса плоскости $(\bar{e}_1; \bar{e}_2), (\bar{e}'_1; \bar{e}'_2)$, при этом векторы 2-го базиса выражены через векторы 1-го: $\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2$. Пусть вектор $\bar{v}(v_1; v_2)$ задан в базисе $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$.

Тогда его координаты v'_1, v'_2 в новом базисе $(\bar{e}'_1; \bar{e}'_2)$ связаны со старыми координатами системой

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}v'_1 + a_{12}v'_2 \\ v_2 = a_{21}v'_1 + a_{22}v'_2 \end{cases}, \text{ в матричной форме: } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}, \text{ компактнее: } V = AV'. \text{ Разрешив}$$

матричное уравнение относительно V' , получаем формулу, выражающую новые координаты через

старые: $V' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot V$, где A^{-1} – **обратная матрица** для матрицы перехода $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

2) Трёхмерный случай аналогичен. Если векторы базиса $(\bar{f}_1; \bar{f}_2; \bar{f}_3)$ выражены через векторы базиса $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$: $\bar{f}_1 = b_{11}\bar{e}_1 + b_{21}\bar{e}_2 + b_{31}\bar{e}_3$, $\bar{f}_2 = b_{12}\bar{e}_1 + b_{22}\bar{e}_2 + b_{32}\bar{e}_3$, $\bar{f}_3 = b_{13}\bar{e}_1 + b_{23}\bar{e}_2 + b_{33}\bar{e}_3$ и вектор $\bar{x}$ имеет координаты x_1, x_2, x_3 в базисе «е», то его координаты x'_1, x'_2, x'_3 в базисе «эф» связаны с теми

координатами соотношением $X = BX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$. Разрешив

уравнение относительно X' , находим координаты вектора $\bar{x}$ в базисе «эф»: $X' = B^{-1}X$.

23. Формулы перехода к новой системе координат родственны**1) Двумерный случай**

Пусть базисные векторы аффинных систем $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2), (O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ связаны соотношениями $\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2$. Тогда координаты x, y произвольной точки M в первом базисе выражаются через его координаты x', y' во втором базисе уравнением $X = AX' + X_0$, где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \text{координаты точки } O' \text{ в 1-й системе координат.}$$

Разрешив уравнение относительно X' , получаем выражение «новых» координат через «старые»:

$$X' = A^{-1}X + X'_0, \text{ где } X'_0 = \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = -A^{-1}X_0 - \text{координаты точки } O \text{ во 2-й системе координат.}$$

В частности, если осуществляется переход от декартовой системы $(O; \bar{i}; \bar{j})$ к другой *правой*

декартовой системе координат $(O'; \bar{i}'; \bar{j}')$, то матрица перехода такова: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, где

$\alpha = \angle(\bar{i}; \bar{i}')$ – угол между первыми координатными векторами. Для двух *левых* декартовых систем матрица та же. Если же системы имеют разную ориентацию, то $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

2) Трёхмерный случай аналогичен

С более подробной информацией и примерами можно ознакомиться на уроке

[Переход к новому базису и к новой системе координат](#)