

**Таблица разложений некоторых функций в степенные ряды**

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

Область сходимости ряда:  $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \alpha^{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Область сходимости ряда:  $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \alpha^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!}$$

Область сходимости ряда:  $-\infty < \alpha < +\infty$

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n}{n}$$

Ряд сходится при  $-1 < \alpha < 1$  или, то же самое, при  $|\alpha| < 1$

**Кроме того,** в каждом конкретном случае нужно исследовать концы интервала сходимости – там ряд тоже может сходиться!

Биномиальное разложение:

$$(1 + \alpha)^k = 1 + \alpha \cdot k + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \alpha^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \alpha^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!} \cdot \alpha^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!} \cdot \alpha^n$$

Ряд сходится при  $-1 < \alpha < 1$  ( $|\alpha| < 1$ ).

**Как и в предыдущем пункте** – концы интервала подлежат исследованию!

Распространенные частные случаи биномиального разложения:

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 + \dots$$

$$\sqrt{1 - \alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \alpha^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \alpha^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \dots$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{2n+1}$$

Область сходимости ряда:  $-1 \leq \alpha \leq 1$  или, то же самое:  $|\alpha| \leq 1$

$$\arcsin \alpha = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\alpha^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\alpha^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\alpha^9}{9} + \dots + \frac{(2n-1)!! \alpha^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)} + \dots$$

Область сходимости ряда:  $-1 \leq \alpha \leq 1$  или, то же самое:  $|\alpha| \leq 1$

Поскольку речь идёт о степенных рядах, то **разложения справедливы не только для значения  $\alpha = x$** , но и для других степенных одночленов, таких как  $\alpha = -x$ ,  $\alpha = 2x$ ,  $\alpha = x^2$ ,  $\alpha = -5x^3$ ,  $\alpha = 3\sqrt{x}$ ,  $\alpha = \sqrt[3]{x}$ ,  $\alpha = 3x^4$  и т.п.

**При этом** в общем случае фактическая область сходимости **будет другой!** Так, например, при  $\alpha = \frac{x}{2}$  разложение функции  $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$  сходится к ней на промежутке:

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

**Более того**, табличный «шаблон» может быть «урезан», типичные примеры:

1) если  $\alpha = \sqrt{x}$ , то функция  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$  определена только для неотрицательных значений аргумента, и поэтому область сходимости соответствующего ряда:  $0 \leq x < +\infty$ ;

2) аналогично, если  $\alpha = \sqrt[4]{x}$ , то разложение функции  $f(x) = \ln(1 + \sqrt[4]{x})$  сойдётся к ней лишь в области  $0 \leq x \leq 1$ .

С дополнительной информацией и практическими задачами по теме можно ознакомиться на уроке [http://mathprofi.ru/razlozhenie\\_funkcij\\_v\\_stepennye\\_ryady.html](http://mathprofi.ru/razlozhenie_funkcij_v_stepennye_ryady.html)