Дополнительные задачи по комбинаторике

Задача 1. В комнате имеется 6 лампочек, каждая со своим выключателем. Сколькими способами можно освещать комнату?

Решение: $C_6^1 = 6$ способами можно включить 1 лампочку.

$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ способами можно включить 2 лампочки.

$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$ способами можно включить 3 лампочки.

$C_6^4 = 15$ способами можно включить 4 лампочки.

$C_6^5 = 6$ способами можно включить 5 лампочек.

$C_6^6 = 1$ способом можно включить 6 лампочек.

$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ способами можно осветить комнату.

Ответ: 63

Примечание: *эту задачу также можно решить короче (см. конец урока)*

Задача 2. Из группы, в которой учатся 20 человек, нужно выбрать двоих студентов для поездки на картошку. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ способами можно выбрать двух студентов из двадцати.

Ответ: 190

Задача 3. Из пяти военнослужащих рядового состава и трех военнослужащих-сержантов необходимо сформировать две группы по 4 человека в каждой группе, при условии, что в каждой группе должен быть хотя бы один сержант. Сколькими способами можно составить эти группы?

Решение: рассмотрим одну из групп: $C_3^1 = 3$ способами можно выбрать сержанта для группы (в другой группе будут два других сержанта).

$C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ способами можно выбрать трёх рядовых для группы (в другой группе будут два других рядовых).

Таким образом, группы можно составить $C_3^1 \cdot C_5^3 = 3 \cdot 10 = 30$ способами.

Если принципиально, какая группа первая, а какая вторая, то число комбинаций следует удвоить (то есть в 1-й и 2-й группе может быть один либо два сержанта).

Ответ: 30 либо 60, если принципиально, какая группа первая, а какая вторая.

Примечание: *подобным задачам посвящён целый урок – о разделении множества на группы.*

Задача 4. Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры в записи могут повторяться?

Решение: на 4 делятся все натуральные числа, две последние цифры которых составляют нули или число, кратное 4.

Нули в представленном наборе цифр отсутствуют.

Рассмотрим два младших разряда четырехзначного числа и перечислим те комбинации из набора 1, 2, 3, 4, 5, которые делятся на 4:
**12
**24
**32
**44
**52
Всего: 5 благоприятствующих комбинаций.

$C_5^1 = 5$ способами можно выбрать цифру для каждого из двух старших разрядов.

Таким образом, из предложенного набора цифр можно составить:
$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ чисел, которые делятся на 4

Ответ: 125

Задача 5. Сколько различных (не обязательно осмысленных) слов можно получить, переставляя буквы слова «колонка».

Решение: в данном слове 7 букв и дважды повторяются буквы «о» и «к». Используем формулу для перестановок с повторениями:
$p_{n(повт)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{7!}{2!2!} = \frac{5040}{4} = 1260$ различных (не обязательно осмысленных) слов можно получить, переставляя буквы слова «колонка».

Ответ: 1260

Задача 6. У пиратов в трюме томятся 13 пленников. Сколько есть способов выбрать троих, чтобы ~~съесть~~ отпустить на свободу?

Решение:
$C_{13}^3 = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{6} = 286$ способами можно выбрать трёх пленников из тринадцати.

Ответ: 286

Задача 7. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: считаем, что учащийся не может сдавать более одного экзамена в день.

$A_8^4 = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1680$ способами учащийся может сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней.

Ответ: 1680

Задача 8. Сколько различных автомобильных номеров можно составить из 9 гласных букв русского алфавита и цифр десятичной системы счисления, при условии, что номер не будет содержать цифру 0 и будет состоять из трех букв и четырех цифр?

Решение:

$C_9^1 = 9$ способами можно выбрать букву для каждого знакоместа.

$C_9^1\cdot C_9^1\cdot C_9^1 = 9^3$ способами можно выбрать 3 буквы для номера.

$(C_9^1)^4 = 9^4$ способами можно выбрать 4 цифры (без нулей) для номера.

Таким образом, можно составить: $9^3\cdot 9^4 = 9^7$ номеров.

Ответ: $9^7 = 4782969$ номеров.

Задача 9. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево.

Решение:

$C_9^1 = 9$ способами можно выбрать цифру для разряда единиц и разряда десятков тысяч (ноль исключаем, так как, если он находится в разряде десятков тысяч, то число не является пятизначным).

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать цифру для разряда десятков и тысяч.

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать цифру для разряда сотен.

Таким образом, существует $C_9^1\cdot C_{10}^1\cdot C_{10}^1 = 9\cdot 10\cdot 10 = 900$ пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево.

Ответ: 900

Задача 10. Трудовой коллектив из 31 человека должен выбрать руководителя и его заместителя. Сколько существует способов их выбора, если каждый член коллектива может быть либо руководителем, либо его заместителем?

Решение:

$A_{31}^2 = 30\cdot 31 = 930$ способами можно выбрать руководителя и его заместителя в данном коллективе.

Ответ: 930

Задача 11. Из спортивного клуба, насчитывающего 15 членов, необходимо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100+200+400+800. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:
$C_{15}^{4}=\frac{15!}{11!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24}=1365$ способами можно выбрать 4 человека из 15.

Если учитывать распределение ролей, то $P_4=4!=24$ способами можно распределить дистанции 100, 200, 400 и 800 метров между 4 спортсменами в каждой выборке.

Таким образом, команду можно составить:
$C_{15}^{4}\cdot P_4=1365\cdot 24=32760$ способами.

Второй способ:
$A_{15}^{4}=12\cdot 13\cdot 14\cdot 15=32760$

Ответ: 1365, если не учитывать распределение дистанций между спортсменами, и 32760 – если учитывать.

Задача 12. Сколькими способами можно выбрать две буквы из слова «учебник», чтобы одна из них была гласная, а другая – согласная?

Решение: в слове «учебник» 7 букв, 3 из них – гласные, а 4 – согласные.

$C_3^1=3$ способами можно выбрать гласную букву.

$C_4^1=4$ способами можно выбрать согласную букву.

$C_3^1\cdot C_4^1=3\cdot 4=12$ способами можно выбрать одну гласную и одну согласную букву.

Ответ: 12

И ещё 16 задач по комбинаторике из сборника А. П. Рябушко

Сначала условия, затем ссылка на решения:

Задача 1.1. На сельскохозяйственные работы из трёх бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на сельскохозяйственные работы может быть отправлен каждый рабочий.

Задача 1.2. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

Задача 1.3. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписании занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

Задача 1.4. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку?

Задача 1.5. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

Задача 1.6. На конференцию из трёх групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 28 и в третьей – 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в состав делегации.

Задача 1.8. Сколько различных четырёхзначных чисел можно записать с помощью девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется.

Задача 1.11. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

Задача 1.12. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?

Задача 1.13. Сколькими способами можно составить патруль из трёх солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Задача 1.14. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между тремя учениками так, чтобы каждый получил 2 книги?

Задача 1.16. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 40 человек может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря1?

Задача 1.20. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?

Задача 1.22. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трёх нападающих, трёх полузащитников, четырёх защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

Задача 1.23. Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своём заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом должно быть?

Задача 1.24. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»?

Архив с решениями данных задач можно закачать на странице:
https://mathprofi.ru/idz_ryabushko_besplatno.html *(ИДЗ-18.1)*