

Сборник готовых задач на формулу Бернулли

Задача 1. Пусть проводится $n = 6$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p = 0,1$. Найти вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится $m = 3$ раза.

Решение: используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В данной задаче:

$n = 6$ – всего испытаний;

$m = 3$ – ожидаемое количество появлений события A в шести испытаниях;

$p = 0,1$ – вероятность появления события A в каждом испытании;

$q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$ – вероятность того, что событие A не появится в каждом испытании;

P_6^3 – вероятность того, что в 6 испытаниях событие A появится ровно 3 раза.

Таким образом, искомая вероятность:

$$P_6^3 = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot 0,001 \cdot 0,729 = 0,01458$$

Ответ: $P_6^3 = 0,01458$

Задача 2. Стрелок делает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле $\frac{2}{3}$. Найти вероятность того, что он попал 4 раза.

Решение: используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В данном случае:

$n = 6$ – всего выстрелов;

$m = 4$ – искомое количество попаданий в шести испытаниях;

$p = \frac{2}{3}$ – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;

$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ – вероятность промаха в каждом выстреле;

Таким образом:

$$P_6^4 = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{16}{729} = \frac{80}{243}$$
 – вероятность того, что при шести

выстрелах будет ровно 4 попадания.

Ответ: $P_6^4 = \frac{80}{243} \approx 0,3292$

Задача 3. В результате исследования были выделены семьи, имеющие по 4 ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:

- а) одного мальчика;
- б) двух мальчиков.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данной задаче:

$n = 4$ – всего детей в семье;

m – количество мальчиков в семье.

$p = 0,5$ – вероятность рождения мальчика;

$q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$ – вероятность рождения девочки;

P_4^m – вероятность того, что среди 4 детей будет ровно m мальчиков.

а) $P_4^1 = C_4^1 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^3 = 4 \cdot (0,5)^4 = 0,25$ – вероятность того, что среди 4 детей будет один мальчик.

б) $P_4^2 = C_4^2 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = 6 \cdot (0,5)^4 = 0,375$ – вероятность того, что среди 4 детей будет два мальчика.

Ответ: а) 0,25; б) 0,375

Задача 4. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность, что из десяти проверяемых документов девять из них не будет содержать ошибки?

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данном случае:

$n = 10$ – всего проверяемых документов;

$m = 9$ – количество документов, в которых нет ошибки;

$p = 0,9$ – вероятность того, что документ не содержит ошибки;

$q = 0,1$ – вероятность того, что ошибка есть.

Таким образом:

$P_{10}^9 = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1 = 10 \cdot (0,9)^9 \cdot 0,1 \approx 0,3874$ – вероятность того, что из десяти проверяемых документов ровно девять не будут содержать ошибки.

Ответ: $\approx 0,3874$

Задача 5. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данном случае:

$$P_6^4 = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{2!4!} \cdot (0,02)^4 \cdot (0,98)^2 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (0,02)^4 \cdot (0,98)^2 \approx 0,000002 - \text{вероятность}$$

того, что из 6 изготовленных станков 4 нуждаются в дополнительной регулировке

Ответ: $\approx 0,000002$, данное событие практически невозможно.

Задача 6. Производится 5 выстрелов в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $3/4$. Найти вероятность того, что в мишени будет не менее трёх, но и не более четырёх пробоин. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данном случае:

$$P_5^3 = C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{3^3}{4^5} = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{27}{1024} = \frac{270}{1024} \approx 0,2637 - \text{вероятность того, что при}$$

пяти выстрелах в мишень будет ровно 3 попадания.

$$P_5^4 = C_5^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 5 \cdot \frac{3^4}{4^5} = 5 \cdot \frac{81}{1024} = \frac{405}{1024} \approx 0,3955 - \text{вероятность того, что при}$$

пяти выстрелах в мишень будет ровно 4 попадания.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_5(3 \leq m \leq 4) = P_5^3 + P_5^4 = \frac{270}{1024} + \frac{405}{1024} = \frac{675}{1024} \approx 0,6592 - \text{вероятность того, что в}$$

мишени будет не менее трёх, но и не более четырёх пробоин.

Наивероятнейшее число попаданий m_0 удовлетворяет следующему неравенству:

$$np - q \leq m_0 < np + p$$

$$5 \cdot 0,75 - 0,25 \leq m_0 < 5 \cdot 0,75 + 0,75$$

$$3,5 \leq m_0 < 4,5 \Rightarrow m_0 = 4$$

Соответствующая вероятность уже найдена: $P_5^4 = \frac{405}{1024} \approx 0,3955$.

Ответ: $P_5(3 \leq m \leq 4) = \frac{675}{1024} \approx 0,6592$, $m_0 = 4$, $P_5^4 = \frac{405}{1024} \approx 0,3955$

Задача 7. В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 черных шаров. Из каждой урны извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух черных и шести белых или трех черных и пяти белых шаров?

Решение: из условия находим: $10 + 5 = 15$ шаров в каждой урне.

По классическому определению:

$$p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ – вероятности извлечения черного и белого шара}$$

соответственно из каждой урны.

Используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$P_8^2 = C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{2^6}{3^8} = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{64}{3^8} = \frac{1792}{3^8} \approx 0,2731$ – вероятность того, что будут извлечены 2 черных и 6 белых шаров.

$P_8^3 = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{2^5}{3^8} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{32}{3^8} = \frac{1792}{3^8} \approx 0,2731$ – вероятность того, что будут извлечены 3 черных и 5 белых шаров.

$$P_8^2 = P_8^3$$

Ответ: данные события равновероятны

Задача 8. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,5. Найти вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

Решение: используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В данном случае:

$n = 8$ – всего выстрелов

$p = 0,5$ – вероятность поражения мишени при каждом выстреле;

$q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$\begin{aligned} P_8(5 \leq m \leq 7) &= P_8^5 + P_8^6 + P_8^7 = C_8^5 \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^3 + C_8^6 \cdot (0,5)^6 \cdot (0,5)^2 + C_8^7 \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^3 = \\ &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot (0,5)^8 + \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot (0,5)^8 + 8 \cdot (0,5)^8 = 0,21875 + 0,109375 + 0,03125 = 0,359375 \end{aligned}$$

– вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена от 5 до 7 раз.

Ответ: 0,359375

Задача 9. Для вычислительной лаборатории приобретено девять компьютеров, причем вероятность брака для каждого компьютера равна 0,1. Какова вероятность, что придется заменить более двух компьютеров.

Решение: сначала найдем $P_9(m \leq 2)$ – вероятность того, что придется заменить не более двух компьютеров. Используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ в данной задаче:}$$

$$n = 9 \text{ – всего компьютеров;}$$

$$m = \{0; 1; 2\} \text{ – искомое количество компьютеров, подлежащих замене;}$$

$$p = 0,1 \text{ – вероятность брака;}$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9 \text{ – вероятность того, что компьютер качественный;}$$

P_9^m – вероятность того, что среди 9 компьютеров бракованными окажутся ровно m компьютеров.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_9(m \leq 2) = P_9^0 + P_9^1 + P_9^2 = C_9^0 \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^9 + C_9^1 \cdot (0,1)^1 \cdot (0,9)^8 + C_9^2 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^7 =$$

$$= (0,9)^9 + 9 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^8 + \frac{9!}{7!2!} \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^7 \approx 0,3874 + 0,3874 + 0,1722 \approx 0,947$$

–вероятность того, что придется заменить не более двух компьютеров.

Тогда: $P_9(m > 2) = 1 - P_9(m \leq 2) \approx 1 - 0,947 = 0,053$ – вероятность того, что придется заменить более двух компьютеров.

Ответ: $\approx 0,053$

Задача 10. В магазине 6 покупателей. Каждый может совершить покупку с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что не более двух человек совершат покупку.

Решение: рассмотрим событие: A – покупку совершат не более двух человек из шести. Событие A состоит в трех несовместных исходах: покупку никто не совершит, или покупку совершит один человек, или покупку совершат два человека.

Для решения задачи используем формулу Бернулли:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ в данной задаче:}$$

$$n = 6 \text{ – всего человек в магазине;}$$

$$m = \{0; 1; 2\} \text{ – искомое количество человек, которые совершат покупку;}$$

$p = 0,4$ – вероятность того, что покупатель совершит покупку (для каждого человека);

$q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$ – вероятность того, что покупатель не совершит покупки (для каждого человека).

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_6(m \leq 2) = P_6^0 + P_6^1 + P_6^2 = C_6^0 \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^6 + C_6^1 \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^5 + C_6^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^4 =$$

$$(0,6)^6 + 6 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^5 + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^4 = 0,046656 + 0,186624 + 0,31104 = 0,54432$$

Ответ: $P_6(m \leq 2) = 0,54432$ – искомая вероятность.

Задача 11. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «Атлант», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:

- а) не менее чем двум покупателям;
- б) не более чем трем покупателям;
- в) всем четверем покупателям.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, в данной задаче:

$n = 4$ – всего покупателей на складе;

m – количество покупателей, которым потребуется холодильник марки «Атлант».

$p = 0,4$ – вероятность того, что холодильник «Атлант» потребуется покупателю

(для каждого покупателя);

$q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$ – вероятность того, что он не потребуется.

а) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$\begin{aligned} P_4(m \geq 2) &= P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = C_4^1 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^3 = C_4^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + C_4^3 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^1 + \\ &+ C_4^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^0 = 6 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + 4 \cdot (0,4)^3 \cdot 0,6 + (0,4)^4 = \\ &= 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 0,5248 \end{aligned}$$

– вероятность того, что данный холодильник потребуется не менее чем двум покупателям

в) По формуле Бернулли: $P_4^4 = 0,0256$ – вероятность того, что данный холодильник потребуется все четверем покупателям (рассчитано в предыдущем пункте)

б) Тогда: $P_4(m \leq 3) = 1 - P_4^4 = 1 - 0,0256 = 0,9744$ – вероятность того, что данный холодильник потребуется не более чем трем покупателям.

Ответ: а) 0,5248; б) 0,9744; в) 0,0256

Задача 12. Вероятность попадания стрелка в мишень при 1 выстреле равна 0,5. Производится 5 выстрелов. Найти вероятность того, что стрелок промахнется не более двух раз.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$, в данном случае:

$n = 5$ – всего выстрелов;

$x = \{0, 1, 2\}$ – искомое количество промахов;

$p = 1 - 0,5 = 0,5$ – вероятность промаха при каждом выстреле;

$q = 0,5$ – вероятность попадания;

P_5^x – вероятность того, что при 5 выстрелах будет ровно x промахов

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$\begin{aligned} p_5(x \leq 2) &= P_5^0 + P_5^1 + P_5^2 = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 + C_5^2 p^2 q^3 = \\ &= (0,5)^5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,5)^4 + \frac{5!}{3!2!} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^3 = 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5 \end{aligned}$$

– вероятность того, при 5 выстрелах будет не более 2 промахов.

Ответ: 0,5

Задача 13. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет:
а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данной задаче:

$n = 5$ – всего бросков;

m – количество выпадений «герба»;

$p = 0,5$ – вероятность выпадения «герба»;

$q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$ – вероятность выпадения «решки»;

P_5^m – вероятность того, что при 5 бросках «герб» выпадет ровно m раз.

1) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_5(m < 2) = P_5^0 + P_5^1 = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 = 1 \cdot (0,5)^0 \cdot (0,5)^5 + 5 \cdot (0,5)^1 \cdot (0,5)^4 = \\ = 6 \cdot (0,5)^5 = 6 \cdot 0,03125 = 0,1875$$
 – вероятность того, что при 5 бросках герб выпадет

менее 2 раз.

2) Вероятность противоположного события:

$$P_5(m \geq 2) = 1 - P_5(m < 2) = 1 - 0,1875 = 0,8125$$
 – вероятность того, что при 5 бросках

герб выпадет не менее двух раз.

Ответ: 1) 0,1875; 2) 0,8125

Задача 14. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролёт с вероятностью 0,8. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данном случае:

$n = 5$ – общее количество счетчиков;

m – количество счетчиков, зарегистрировавших частицу;

$p = 0,8$ – вероятность регистрации частицы для каждого счетчика;

$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$ – вероятность того, что частица не будет зарегистрирована;

P_5^m – вероятность того, что из пяти счетчиков частицу регистрируют ровно m

счетчиков.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(m < 2) = P_5^0 + P_5^1 = C_5^0 \cdot (0,8)^0 \cdot (0,2)^5 + C_5^1 \cdot (0,8)^1 \cdot (0,2)^4 =$$

$$= (0,2)^5 + 5 \cdot 0,8 \cdot (0,2)^4 = 0,00032 + 0,0064 = 0,00672$$
 – вероятность того, что частица

будет отмечена менее чем двумя счетчиками (не зарегистрирована).

Найдём вероятность противоположного события:

$$P(m \geq 2) = 1 - P(m < 2) = 1 - 0,00672 = 0,99328$$
 – вероятность того, что частица будет

отмечена не менее чем двумя счетчиками (частица зарегистрирована).

Ответ: 0,99328

Задача 15. В магазине имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров.

Решение: используем формулу Бернулли: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$.

В данной задаче:

$n = 7$ – всего телевизоров;

m – количество включенных телевизоров;

$p = 0,6$ – вероятность того, что телевизор включен;

$q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$ – вероятность того, что телевизор выключен;

P_7^m – вероятность того, что из 7 телевизоров включены ровно m .

$$\text{а) } P_7^4 = C_7^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^3 = 0,290304 \text{ – вероятность того,}$$

что в данный момент включены четыре телевизора из семи.

б) $P_7^0 = C_7^0 \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^7 = (0,4)^7 = 0,0016384$ – вероятность того, что в данный момент все телевизоры выключены.

Тогда вероятность противоположного события:

$P_7(m \geq 1) = 1 - P_7^0 = 1 - 0,0016384 = 0,9983616$ – вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один телевизор.

в) По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P_7(m < 3) = P_7^0 + P_7^1 + P_7^2 = 0,0016384 + C_7^1 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^6 + C_7^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^5 =$
 $= 0,0016384 + 0,0172032 + 0,0774144 = 0,096256$ – вероятность того, что в данный момент включено менее трех телевизоров из семи.

Вероятность противоположного события:

$P_7(m \geq 3) = 1 - P_7(m < 3) = 1 - 0,096256 = 0,903744$ – вероятность того, что в данный момент включено не менее трех телевизоров из семи.

Ответ: а) 0,290304; б) 0,9983616; в) 0,903744