Сборник задач на формулу полной вероятности и формулы Байеса

Задача 1. В эксперименте используются карточки белого и зеленого цветов, на которых изображены геометрические фигуры: квадрат или треугольник. Вероятность того, что на зеленой карточке изображен треугольник, равна 0,85. Для белой карточки эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая карточка будет содержать треугольник, если в эксперименте используется одинаковое количество карточек зеленого и белого цветов.

Решение: так как в эксперименте используется одинаковое количество карточек зеленого и белого цветов, то выбор карточки любого цвета равновозможен и соответствующая вероятность выбора равна 0,5 для каждого цвета.

По условию:
$\tilde{p}_1 = 0{,}85$, $\tilde{p}_2 = 0{,}9$ – вероятности того, что на зеленой и белой карточке соответственно изображен треугольник.

По формуле полной вероятности:
$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}425 + 0{,}45 = 0{,}875$ – вероятность того, что наудачу взятая карточка будет содержать треугольник.

Ответ: 0,875

Задача 2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсеровского полёта и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета составляет 80% всего времени полёта, условия перегрузки – 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Найти вероятность того, что прибор не откажет в течение всего полёта.

Решение: из условия следуют:
$p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}2$ – вероятности того, что самолет находится в нормальном режиме и режиме перегрузки соответственно.

$\tilde{p}_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, $\tilde{p}_2 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ – вероятности безотказной работы прибора для соответствующих режимов.

По формуле полной вероятности:
$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}72 + 0{,}12 = 0{,}84$ – вероятность того, что прибор не откажет в течение всего полёта

Ответ: 0,84

Задача 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и извлекает из неё шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым, б) белый шар извлечён из второй урны.

Решение: выбор любой из трёх урн равновозможен и вероятность выбора каждой из урн: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

По классическому определению: $\tilde{p}_1 = \frac{4}{9}$, $\tilde{p}_2 = \frac{5}{9}$, $\tilde{p}_3 = \frac{6}{6} = 1$ – вероятность того, что из соответствующих урн будет извлечен белый шар.

а) По формуле полной вероятности:

$p_Б = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{4}{27} + \frac{5}{27} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечён белый шар.

б) По формуле Байеса:

$p_{2Б} = \frac{p_2\tilde{p}_2}{p_Б} = \frac{5}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{5}{18}$ – вероятность того, что белый шар извлечён из второй урны.

Ответ: а) $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$ б) $\frac{5}{18} \approx 0{,}2778$

Задача 4. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров.

Решение: выбор любой из 10 урн равновозможен, и вероятность выбора каждой урны составляет 1/10.

По классическому определению вероятности, вероятность извлечения белого шара из первых девяти урн составляет 1/2, вероятность извлечения белого шара из десятой урны составляет 5/6.

По формуле полной вероятности:

$p = \underbrace{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{девять слагаемых}} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6} = \frac{9}{20} + \frac{1}{12} = \frac{8}{15}$ – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен белый шар.

По формуле Байеса:

$p_{10} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{15}{8} = \frac{5}{32} = 0{,}15625$ – вероятность того, что извлеченный белый шар был извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров.

Ответ: 0,15625

Задача 5. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то прибор регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если только помеха – то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

Решение: по условию:

$p_1 = 0{,}8$ – вероятность того, что поступит смесь полезного сигнала с помехой;

$p_2 = 0{,}2$ – вероятность того, что поступит только помеха;

$\tilde{p}_1 = 0{,}7$ – вероятность того, что прибор зарегистрирует какой-то сигнал, когда поступила смесь полезного сигнала с помехой;

$\tilde{p}_2 = 0{,}3$ – вероятность того, что прибор зарегистрирует какой-то сигнал, когда поступила только помеха.

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}56 + 0{,}06 = 0{,}62$ – вероятность того, что прибор зарегистрирует какой-то сигнал.

По формуле Байеса:

$p_1^* = \dfrac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \dfrac{0{,}56}{0{,}62} = \dfrac{28}{31}$ – вероятность того, что в зарегистрированном сигнале содержится полезный сигнал

Ответ: $\dfrac{28}{31} \approx 0{,}9032$

Задача 6. Среди определенной группы людей вероятность некоторой болезни составляет 0,02. Тест, позволяющий выявить болезнь, несовершенен. На больном он дает позитивный результат в 98 случаях из 100, и, кроме того, он дает позитивный результат в 4 случаях из 100 на здоровом. Найдите вероятность того, что человек, на котором тест дал положительный результат, действительно болен.

Решение: по условию, $p = 0{,}02$ – вероятность того, что человек болен данной болезнью. Тогда вероятность того, что он не болен: $q = 1 - p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

По классическому определению вероятности:

$p_+ = 0{,}98$ – вероятность положительного результата теста, когда человек болен;

$\overline{p}_+ = 0{,}04$ – вероятность положительного результата теста, когда человек здоров.

По формуле полной вероятности:

$p = p \cdot p_+ + q \cdot \overline{p}_+ = 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}0196 + 0{,}0392 = 0{,}0588$ – вероятность того, что тест даст положительный результат на случайно выбранном человеке.

По формуле Байеса:

$\tilde{p} = \dfrac{p \cdot p_+}{p} = \dfrac{0{,}0196}{0{,}0588} = \dfrac{1}{3}$ – вероятность того, что человек, на котором тест дал положительный результат, действительно болен.

Ответ: $\tilde{p} = \dfrac{1}{3}$

Задача 7. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем деталей, обработанных на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на 1-м станке.

Решение: пусть x – количество деталей, изготавливаемых на станке № 2, тогда количество изготавливаемых деталей на станке № 1: $2x$.

Составим и решим уравнение:

$$2x + x = 1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ – вероятности того, что деталь изготовлена первым и вторым станком соответственно.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$\tilde{p}_1 = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100}$, $\tilde{p}_2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100}$ – вероятности того, что деталь, изготовленная на первом и втором станке соответственно, будет стандартной.

а) По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{97}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{98}{100} = \frac{194}{300} + \frac{98}{300} = \frac{292}{300} = \frac{73}{75}$ – вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

б) По формуле Байеса:

$p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{194}{300} \cdot \frac{75}{73} = \frac{97}{146}$ – вероятность того, что наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

Ответ: а) $\frac{73}{75} \approx 0{,}973$ б) $\frac{97}{146} \approx 0{,}664$

Задача 8. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велогонщиков и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификацию такова: для лыжника – 0,9, для велогонщика – 0,8, для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен:
а) выполнит норму, б) не выполнит норму.

Решение: всего: 20 + 6 + 4 = 30 спортсменов в группе. По классическому определению вероятности: $p_1 = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, $p_3 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ – вероятность выбора лыжника, велогонщика и бегуна соответственно.

По условию, $\tilde{p}_1 = 0{,}9 = \frac{9}{10}$, $\tilde{p}_2 = 0{,}8 = \frac{4}{5}$, $\tilde{p}_3 = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ – вероятности выполнить квалификацию для соответствующих спортсменов.

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5} + \frac{4}{25} + \frac{1}{10} = \frac{43}{50} = 0{,}86$ – вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен выполнит норму.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$q = 1 - p = 1 - 0{,}86 = 0{,}14$ – вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен не выполнит норму.

Ответ: а) 0,86 б) 0,14

Задача 9. На избирательную комиссию поступило 1500 бюллетеней с участка № 1, 2500 с участка № 2, 3000 с участка № 3. Среди бюллетеней с участка № 1 в среднем 90% действительных, с участка № 2 – 80%, с участка № 3 – 70%. Найти вероятность того, что наугад взятый бюллетень окажется:

а) недействительным; б) действительным.

Решение: всего: 1500 + 2500 + 3000 = 7000 бюллетеней поступило на избирательную комиссию.

По классическому определению вероятности:

$p_1 = \frac{1500}{7000} = \frac{3}{14}$, $p_2 = \frac{2500}{7000} = \frac{5}{14}$, $p_3 = \frac{3000}{7000} = \frac{6}{14}$ – вероятности того, что бюллетень поступил с 1-го, 2-го и 3-го участка соответственно.

По условию, $\tilde{p}_1 = \frac{9}{10}$, $\tilde{p}_2 = \frac{8}{10}$, $\tilde{p}_3 = \frac{7}{10}$ – вероятности того, что бюллетень соответствующего участка, является действительным.

Рассмотрим события:

A – наудачу выбранный бюллетень будет действительным;
$\overline{A}$ – наудачу выбранный бюллетень будет недействительным.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{3}{14}\cdot\frac{9}{10} + \frac{5}{14}\cdot\frac{8}{10} + \frac{6}{14}\cdot\frac{7}{10} = \frac{27}{140} + \frac{40}{140} + \frac{42}{140} = \frac{109}{140}$$

События A и $\overline{A}$ являются противоположными, поэтому $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, таким образом:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{109}{140} = \frac{31}{140}$$

Ответ: а) $P(\overline{A}) = \frac{31}{140} \approx 0{,}22$, б) $P(A) = \frac{109}{140} \approx 0{,}78$

Задача 10. Однотипные приборы выпускаются 3 заводами в отношении 3:4:5, причём вероятность брака для этих заводов соответственно равны 0,04; 0,05; 0,03. Приобретённый прибор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен 3-м заводом.

Решение: найдём сумму частей соотношения выпускаемых приборов:
3 + 4 + 5 = 12.

Тогда: $p_1 = \frac{3}{12}$, $p_2 = \frac{4}{12}$, $p_3 = \frac{5}{12}$ – вероятности того, что прибор выпущен 1-м, 2-м и 3-м заводами соответственно.

По условию: $\tilde{p}_1 = \frac{4}{100}$, $\tilde{p}_2 = \frac{5}{100}$, $\tilde{p}_3 = \frac{3}{100}$ – вероятности брака для соответствующих заводов.

По формуле полной вероятности:

$$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{100} + \frac{4}{12}\cdot\frac{5}{100} + \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{100} =$$

$$= \frac{12}{1200} + \frac{20}{1200} + \frac{15}{1200} = \frac{47}{1200}$$ – вероятность того, что приобретённый прибор окажется бракованным

По формуле Байеса:

$$p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{15}{1200}\cdot\frac{1200}{47} = \frac{15}{47} \approx 0{,}32$$ – вероятность того, что приобретённый бракованный прибор изготовлен 3-м заводом.

Ответ: $\frac{15}{47} \approx 0{,}32$

Задача 11. Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит изделий в 2 раза больше второго цеха и в 3 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 6%, во втором – 10%, в третьем – 14%. Для контроля из контейнера берется одно изделие. Какова вероятность того, что изделие окажется стандартным (без брака).

Решение: пусть x – доля изделий, выпускаемых третьим цехом. Тогда доли первого и второго цеха соответственно равны: $3x$, $\frac{3}{2}x$.

Составим и решим уравнение:

$$3x + \frac{3}{2}x + x = 1$$

$$\frac{11}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{11}$$

Таким образом: $p_1 = \frac{6}{11}$, $p_2 = \frac{3}{11}$, $p_3 = \frac{2}{11}$ – вероятности того, что деталь выпущена соответствующими цехами.

Из условия найдем вероятности того, что деталь, выпущенная соответствующими цехами, окажется стандартной:

$$\tilde{p}_1 = \frac{100-6}{100} = 0{,}94,\ \tilde{p}_2 = \frac{100-10}{100} = 0{,}9,\ \tilde{p}_3 = \frac{100-14}{100} = 0{,}86.$$

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{6}{11}\cdot 0{,}94 + \frac{3}{11}\cdot 0{,}9 + \frac{2}{11}\cdot 0{,}86 \approx 0{,}915$ – вероятность того, что наудачу извлеченная из контейнера деталь окажется стандартной.

Ответ: $p \approx 0{,}915$

Задача 12. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трём классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у неё, 30% принадлежат классу A, 50% – классу B, 20% – классу C. Вероятность того, что в течение года водитель класса A попадёт хотя бы в одну автокатастрофу, равна 0,01; для водителя класса B эта вероятность равна 0,03, а для водителя класса C – 0,1. Мистер Джонс страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в автокатастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу A?

Решение: из условия следуют: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}2$ – вероятности того, что наугад выбранный водитель принадлежит к соответствующим классам опасности вождения.

По условию, $\tilde{p}_1 = 0{,}01$, $\tilde{p}_2 = 0{,}03$, $\tilde{p}_3 = 0{,}1$ – вероятности попадания в автокатастрофу в течение года для водителей соответствующих категорий.

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + + p_3\tilde{p}_3 = 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}5\cdot 0{,}03 + 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}003 + 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}038$ – вероятность того, что наугад выбранный застрахованный водитель в течение года попадёт хотя бы в одну автокатастрофу.

По формуле Байеса:

$p_A = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{0{,}003}{0{,}038} = \frac{3}{38} \approx 0{,}08$ – вероятность того, что попавший в течение года в автокатастрофу Мистер Джонс относится к категории водителей, которые мало рискуют.

Ответ: $\frac{3}{38} \approx 0{,}08$

Задача 13. На склад поступило 3 партии изделий: первая – 1500 штук, вторая – 2500 штук, третья – 3000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 10%, во второй – 8%, в третьей – 5%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно:

а) из первой партии, б) из второй партии, в) из третьей партии.

Решение: всего: 1500 + 2500 + 3000 = 7000 изделий на складе.

По классическому определению вероятности:

$p_1 = \frac{1500}{7000} = \frac{3}{14}$, $p_2 = \frac{2500}{7000} = \frac{5}{14}$, $p_3 = \frac{3000}{7000} = \frac{6}{14}$ – вероятности того, что наудачу взятое изделие принадлежит первой, второй и третьей партии соответственно.

Из условия следуют: $\tilde{p}_1 = \frac{10}{100}$, $\tilde{p}_2 = \frac{8}{100}$, $\tilde{p}_3 = \frac{5}{100}$ – вероятности того, что изделие из соответствующей партии является нестандартным.

По формуле полной вероятности:

$$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = \frac{3}{14}\cdot\frac{10}{100} + \frac{5}{14}\cdot\frac{8}{100} + \frac{6}{14}\cdot\frac{5}{100} = \frac{30}{1400} + \frac{40}{1400} + \frac{30}{1400} = \frac{100}{1400} = \frac{1}{14}$$

– вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие оказалось нестандартным.

По формуле Байеса:

$p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{30}{1400}\cdot 14 = \frac{3}{10} = 0{,}3$ – вероятность того, что взятое нестандартное изделие из первой партии;

$p_2^* = \frac{p_2\tilde{p}_2}{p} = \frac{40}{1400}\cdot 14 = \frac{2}{5} = 0{,}4$ – вероятность того, что взятое нестандартное изделие из второй партии;

$p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{30}{1400}\cdot 14 = \frac{3}{10} = 0{,}3$ – вероятность того, что взятое нестандартное изделие из третьей партии.

Ответ: а) 0,3 б) 0,4 в) 0,3

Задача 14. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок будет дефектным.

б) Случайно выбранный замок оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

Решение: а) Из условия следуют:

$p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}35$, $p_3 = 0{,}4$ – вероятности того, что замок изготовлен первым, вторым и третьим цехами соответственно.

$\tilde{p}_1 = 0{,}05$, $\tilde{p}_2 = 0{,}04$, $\tilde{p}_3 = 0{,}02$ – вероятности дефекта для соответствующих цехов.

По формуле полной вероятности:

$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 =$

$= 0{,}0125 + 0{,}014 + 0{,}008 = 0{,}0345$ – вероятность того, что случайно выбранный замок будет дефектным.

б) Случайно выбранный замок оказался дефектным. По формуле Байеса:

$p_1^* = \frac{p_1\tilde{p}_1}{p} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = \frac{25}{69}$ – вероятность того, что дефектный замок изготовлен первым цехом;

$p_2^* = \frac{p_2\tilde{p}_2}{p} = \frac{0{,}014}{0{,}0345} = \frac{28}{69}$ – вероятность того, что дефектный замок изготовлен вторым цехом;

$p_3^* = \frac{p_3\tilde{p}_3}{p} = \frac{0{,}008}{0{,}0345} = \frac{16}{69}$ – вероятность того, что дефектный замок изготовлен третьим цехом.

Ответ: а) $0{,}0345$ б) $\frac{25}{69} \approx 0{,}36$, $\frac{28}{69} \approx 0{,}41$, $\frac{16}{69} \approx 0{,}23$

Задача 15. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 5 отличников, 12 подготовленных хорошо, 5 – удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 30 вопросов программы, хорошо подготовленные – 25, подготовленные удовлетворительно – 15, плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Выбранный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостеорную вероятность следующей гипотезы: студент подготовлен плохо.

Решение: по классическому определению вероятности: $p_1 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, $p_2 = \frac{12}{25}$, $p_3 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, $p_4 = \frac{3}{25}$ – вероятности выбора отличника, хорошиста, троечника и плохо подготовленного соответственно.

$C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435$ способами можно выбрать 2 вопроса для экзаменуемого.

По классическому определению: $\tilde{p}_1 = \frac{C_{30}^2}{C_{30}^2} = \frac{435}{435} = 1$ – вероятность того, что отличник ответит на два заданных вопроса.

$C_{25}^2 = \frac{25!}{23! \cdot 2!} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300$ способами можно выбрать 2 вопроса, ответы на которые знает хорошо подготовленный студент.

По классическому определению: $\tilde{p}_2 = \frac{C_{25}^2}{C_{30}^2} = \frac{300}{435} = \frac{20}{29}$ – вероятность того, что хорошо подготовленный студент ответит на два заданных вопроса.

$C_{15}^2 = \frac{15!}{13!\cdot 2!} = \frac{14\cdot 15}{2} = 105$ способами можно выбрать 2 вопроса, ответы на которые знает удовлетворительно подготовленный студент.

По классическому определению: $\tilde{p}_3 = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2} = \frac{105}{435} = \frac{7}{29}$ – вероятность того, что удовлетворительно подготовленный студент ответит на два заданных вопроса.

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 вопроса, ответы на которые знает плохо подготовленный студент.

По классическому определению: $\tilde{p}_4 = \frac{C_{10}^2}{C_{30}^2} = \frac{45}{435} = \frac{3}{29}$ – вероятность того, что плохо подготовленный студент ответит на два заданных вопроса.

По формуле полной вероятности:

$$p = p_1\tilde{p}_1 + p_2\tilde{p}_2 + p_3\tilde{p}_3 + p_4\tilde{p}_4 = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{12}{25}\cdot\frac{20}{29} + \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{29} + \frac{3}{25}\cdot\frac{3}{29} =$$

$= \frac{1}{5} + \frac{48}{145} + \frac{7}{145} + \frac{9}{725} = \frac{429}{725}$ – вероятность того, что вызванный наудачу студент ответит на два вопроса.

По формуле Байеса:

$p_4^* = \frac{p_4\tilde{p}_4}{p} = \frac{9}{725}\cdot\frac{725}{429} = \frac{3}{143}$ – вероятность того, что ответивший на два вопроса студент был подготовлен плохо.

Ответ: $\frac{3}{143} \approx 0{,}021$