Существуют ли определённые интегралы от разрывных функций?

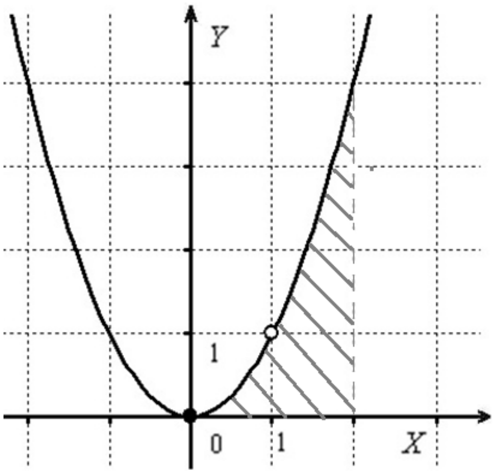
Не буду томить вас долгими ожиданиями, сразу отвечу – да, такие интегралы есть.

Как вы хорошо знаете, **для любой** непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, которому соответствует некоторая фигура *конечной* площади. Иными словами, **из непрерывности функции на отрезке следует её интегрируемость на нём**.

Однако знают чётко **уже не все**, что непрерывность – это всего лишь *достаточное* условие интегрируемости, оно вовсе не *необходимое*. То есть существуют определённые интегралы и от разрывных на отрезке интегрирования функций! А именно, это тот случай, когда функция непрерывна на отрезке всюду, за исключением *конечного* количества точек разрыва 1-го рода. Напоминаю, что это устранимые разрывы либо разрывы «со скачком».

Рассмотрим пару примеров как раз из статьи о непрерывности функции.

Выясним, существует ли $\int_0^2 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx$, и вычислим его в случае положительного ответа. Подынтегральная функция терпит разрыв на отрезке интегрирования в точке $x=1$, определим его характер. Очевидно, функцию можно упростить естественным образом: $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2$, имея в виду, что $x\neq 1$. И геометрически всё хорошо:



Интегралу $\int_0^2 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx$ соответствует конечная площадь, невзирая на выколотую точку, ибо с точки зрения геометрии, её площадь равна нулю. Осталось провести расчёты, и технически здесь есть разные пути. **Во-первых**, можно *доопределить* функцию в точке, устраняя разрыв: $f(x)=1$, если $x=1$, и после этого действия, которое, конечно же, **следует письменно прокомментировать**, разбираемся с интегралом «как обычно»:

$$\int_0^2 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)\Big|_0^2=\frac{1}{3}(8-0)=\frac{8}{3}$$

Но этот трюк проходит далеко не всегда. **Второй, более академичный способ** состоит в разбиении интеграла (и площади) на две части, с последующим расчётом *односторонних* пределов:

$$\int_0^2 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx=\int_0^1 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx+\int_1^2 \frac{x^3-x^2}{x-1}dx=\overset{x\neq 1}{=}\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x^2dx=$$

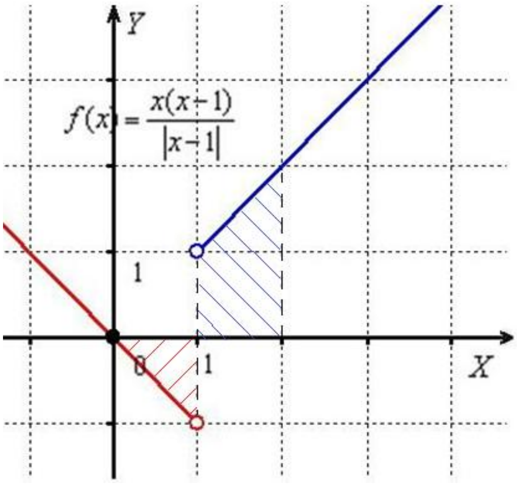
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1-0}(x^3)\Big|_0^x+\frac{1}{3}\lim_{x\to 1+0}(x^3)\Big|_x^2=\frac{1}{3}\lim_{x\to 1-0}(x^3-0^3)+\frac{1}{3}\lim_{x\to 1+0}(2^3-x^3)=$$

$$=\frac{1}{3}(1-0)+\frac{1}{3}(8-1)=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$$

Теперь рассмотрим другой случай: $\int\limits_0^2 \frac{x(x-1)}{|x-1|}dx$, тот же отрезок интегрирования и та же «нехорошая» точка. Раскрывая модуль $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad \alpha \ge 0 \\ -\alpha, & \text{если} \quad \alpha < 0 \end{cases}$ и учитывая, что $x \ne 1$, распишем функцию в кусочном виде:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x(x-1)}{(x-1)}, & \text{если} \quad x-1>0 \\ x \ne 1 & \\ \frac{x(x-1)}{-(x-1)}, & \text{если} \quad x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x>1 \\ x \ne 1 & \\ -x, & \text{если} \quad x<1 \end{cases}$$

И тут у нас разрыв «со скачком»:



Несмотря на то, что функция не определена в точке $x=1$, конечная площадь существует, по той причине, что площадь «стыкового» отрезка (между выколотыми точками) равна нулю, и его можно во внимание не принимать.

Доопределять функцию смысла не имеет, поэтому сразу делим интеграл на две части:

$$\int\limits_0^2 \frac{x(x-1)}{|x-1|}dx = \int\limits_0^1 \frac{x(x-1)}{|x-1|}dx + \int\limits_1^2 \frac{x(x-1)}{|x-1|}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (-x)dx + \int\limits_1^2 xdx =$$

Первый интеграл вычислим с помощью *левостороннего* предела, при этом он получится со знаком «минус», коль скоро криволинейная трапеция лежит ниже OX. Обращаю внимание, что дополнительный «минус» ставить не нужно, поскольку мы рассчитываем **именно определённый интеграл**, а не площадь фигуры.

Второй («синий») интеграл вычислим с помощью *правостороннего* предела:

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-0}(x^2)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1+0}(x^2)\Big|_x^2 = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-0}(x^2-0^2) + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1+0}(2^2-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(4-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

Готово.

Точки разрыва 1-го рода, разумеется, могут располагаться и на концах отрезка интегрирования, и как уже отмечалось, их может быть несколько или даже очень много. Важно, чтобы *конечное* количество. Нет никаких проблем «распилить» интеграл на бОльшее количество частей, и «склеить» их затем в единую сумму.

В том случае, если на отрезке интегрирования имеет место разрыв 2-го рода, то речь заходит о несобственном интеграле второго рода.

Но это уже другая история (с).