Сборник задач на классическое определение вероятности

Задача 1. В лотерее разыгрывается $n=3$ книги. Всего в урне $N=50$ билетов. Первый подошедший к урне вынимает билет. Найти вероятность того, что билет окажется выигрышным.

Решение: рассмотрим событие:
A – первый подошедший извлек выигрышный билет.
По классическому определению вероятностей:
$P(A)=\frac{n}{N}=\frac{3}{50}=0{,}06$ – искомая вероятность.

Ответ: $P(A)=0{,}06$

Задача 2. Секретный замок содержит 15 дисков. Каждый диск имеет десять цифр от 0 до 9. Какова вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр?

Решение: определим общее количество исходов:

$C_{10}^{1}=10$ способами можно набрать цифру на каждом из 15 дисков.
$(C_{10}^{1})^{15}=10^{15}$ способами можно набрать цифры на замке.

Верная комбинация цифр – одна (количество благоприятствующих исходов).

По классическому определению вероятности:
$p=\frac{1}{10^{15}}$ – вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр.

Ответ: $p=\frac{1}{10^{15}}$, то есть событие практически невозможно.

Задача 3. Брошено 8 игральных костей. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Решение: найдём общее число исходов:
$A_{6(повт)}^{8}=6^{8}$ способами могут упасть 8 игральных костей.

Благоприятствующих исходов: 6 (одинаковые цифры на выпавших гранях всех восьми костей)

По классическому определению вероятности:
$p=\frac{6}{6^8}=\frac{1}{6^7}\approx 0{,}000004$ – вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Ответ: $p=\frac{1}{6^7}\approx 0{,}000004$

Задача 4. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным набором цифр, начиная с 00001

Решение: найдем общее число исходов.

Всего существует $10^5 - 1 = 99999$ облигаций с различными пятизначными номерами (исключаем номер 00000).

Найдем количество благоприятствующих исходов:

$A_{10}^5 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$ номеров с различными цифрами.

По классическому определению вероятности:

$p = \dfrac{30240}{99999} \approx 0{,}302$ – вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр.

Ответ: $\approx 0{,}302$

Задача 5. Какова вероятность угадать кодовый трехзначный номер, если он состоит: а) из четных цифр, причем цифры в числе не повторяются; б) из цифр, больших 5, причем цифры в числе могут повторяться

Решение:

а) Найдем общее количество исходов.

Всего четных цифр – пять (0, 2, 4, 6, 8)

$A_5^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способами можно выбрать трёхзначный номер, который состоит из 5 четных цифр и цифры в нем не повторяются.

По классическому определению:

$p = \dfrac{1}{60} \approx 0{,}0167$ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.

б) Найдем общее количество исходов.

Всего подходящих цифр – четыре (6, 7, 8, 9).

$\bar{A}_{4(повт)}^3 = 4^3 = 64$ способами можно выбрать трехзначный номер, который состоит из цифр, больших 5, причем цифры в номере могут повторяться.

По классическому определению:

$\bar{p} = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156$ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.

Ответ: а) $\dfrac{1}{60} \approx 0{,}0167$, б) $\dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156$

Задача 6. Телефонный номер состоит из 7 цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры различны.

Решение: найдем общее число исходов:
$A_{10(повт)}^{7} = 10^7$ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр.

Найдём количество благоприятствующих исходов:
$A_{10}^{7} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 604800$ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр, в котором все цифры различны.

По классическому определению:
$p = \frac{A_{10}^{7}}{A_{10(повт)}^{7}} = \frac{604800}{10^7} = 0{,}06048$ – вероятность того, что в данном телефонном номере все цифры различны.

Ответ: $p = 0{,}06048$

Задача 7. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и не содержат цифры 3. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: найдем общее число исходов.

Всего: $A_{10(повт)}^{2} = 10^2 = 100$ возможных номеров.

Исключаем номера, содержащие в двух последних разрядах цифру 3:
03, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93,
30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39
Итого: 19 номеров.

Также исключаем номера с двумя одинаковыми последними цифрами:
00, 11, 22, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (номер 33 уже учтен) – итого 9 номеров.

Таким образом, общее число исходов: 100 – 19 – 9 = 72

Благоприятствующий исход – один (правильный номер).

По классическому определению вероятности:
$p = \frac{1}{72}$ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер

Ответ: $p = \frac{1}{72} \approx 0{,}014$

Задача 8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и первая цифра больше второй. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: найдем общее число исходов:

Возможная предпоследняя цифра номера:	Возможные последние цифры:	Количество исходов:
1	0	1
2	0, 1	2
3	0, 1, 2	3
4	0, 1, 2, 3	4
5	0, 1, 2, 3, 4	5
6	0, 1, 2, 3, 4, 5	6
7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	7
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8
9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	9

Всего: 45 возможных исходов.
Благоприятствующий исход – один.
По классическому определению:

$p = \frac{1}{45}$ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер

Ответ: $p = \frac{1}{45} \approx 0{,}022$

Задача 9. Из цифр 0, 1, 3, 5, 7 составлено пятизначное число. Найти вероятность того, что оно делится на 5.

Решение: считаем, что цифры не могут повторяться. Найдем общее количество возможных чисел:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способами можно переставить 5 чисел по пяти разрядам.

Исключаем $4! = 24$ случая – когда ноль находится в старшем разряде и, соответственно, число является не пяти, а четырехзначным.

Таким образом:

$5! - 4! = 120 - 24 = 96$ пятизначных чисел можно составить из данных цифр.

Найдем количество чисел, кратных пяти. Число делится на 5, если в младшем разряде находится пятерка либо ноль.

Пусть число заканчивается на 0. Тогда $4! = 24$ способами можно переставить 4 остальные цифры в старших разрядах

Пусть число заканчивается на 5. Аналогично, существует 24 набора цифр, но следует исключить $3! = 6$ случаев, когда ноль на первом месте. Таким образом, искомое количество чисел: 24 – 6 = 18.

Всего чисел, кратных пяти: 24 + 18 = 42

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$ – вероятность того, что наудачу составленное из данных цифр пятизначное число делится на 5.

Ответ: $p = \frac{7}{16} = 0{,}4375$

Задача 10. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 7 до 10 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:
7 очков: $(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)$
8 очков: $(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$
9 очков: $(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)$
10 очков: $(4,6),(6,4),(5,5)$

Всего: 18 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:
$p = \frac{18}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ – искомая вероятность.

Ответ: $\frac{1}{2}$

Задача 11. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 2 до 8 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:
2 очка: $(1,1)$
3 очка: $(1,2),(2,1)$
4 очка: $(1,3),(3,1),(2,2)$
5 очков: $(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)$
6 очков: $(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)$
7 очков: $(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)$
8 очков: $(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$

Всего: 26 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:
$p = \frac{26}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$ – искомая вероятность.

Ответ: $\frac{13}{18}$

***Примечание**: здесь более рационально перечислить исходы, соответствующие противоположному событию (выпадение 9, 10, 11 или 12 очков)*

Задача 12. Брошены две игральные кости. Что вероятнее: выпадение в произведении 6 или 12 очков?

Решение: общее число исходов: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 6:
$(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)$ – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:
$p_6 = \frac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 6.

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 12:
$(2,6),(6,2),(3,4),(4,3)$ – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:
$p_{12} = \frac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 12.

$p_6 = p_{12}$

Ответ: данные события равновероятны.

Задача 13. Бросаются три игральных кубика. Найти вероятности событий:
A – на всех кубиках выпало одинаковое число очков;
B – на всех кубиках в сумме выпало три очка;
C – на всех кубиках в сумме выпало более трех очков.

Решение: найдем общее число исходов:
$C_6^1 = 6$ способами может упасть каждый кубик;
$C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ комбинаций цифр может выпасть при броске трех кубиков.

Событию A соответствует шесть благоприятствующих исходов:
$(1,1,1),\ (2,2,2),\ (3,3,3),\ (4,4,4),\ (5,5,5),\ (6,6,6)$
По классическому определению вероятности:
$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ – вероятность того, что на всех кубиках выпало одинаковое число очков.

Событию B соответствует единственный благоприятствующий исход: $(1,1,1)$

По классическому определению вероятности:
$P(B) = \frac{1}{216}$ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме выпало три очка.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(C)=1-P(B)=1-\dfrac{1}{216}=\dfrac{215}{216}$ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме выпало более трех очков.

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{36}$, $P(B)=\dfrac{1}{216}$, $P(C)=\dfrac{215}{216}$

Задача 14. В коробке 7 красных и 5 синих карандашей. Наудачу взяли три карандаша. Найти вероятность того, что среди выбранных карандашей – ровно 2 красных и 1 синий.

Решение: всего: 7 + 5 = 12 карандашей в коробке.

$C_{12}^{3}=\dfrac{12!}{9!\cdot 3!}=\dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{6}=220$ способами можно извлечь 3 карандаша из коробки.

$C_{7}^{2}=\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}=\dfrac{6\cdot 7}{2}=21$ способом можно извлечь два красных карандаша.

$C_{5}^{1}=5$ способами можно извлечь один синий карандаш.

$C_{7}^{2}\cdot C_{5}^{1}=21\cdot 5=105$ способами можно извлечь искомую комбинацию карандашей.

По классическому определению: $p=\dfrac{C_{7}^{2}\cdot C_{5}^{1}}{C_{12}^{3}}=\dfrac{105}{220}=\dfrac{21}{44}\approx 0{,}4773$ – вероятность того, что будут извлечены 2 красных и 1 синий карандаш.

Ответ: $\dfrac{21}{44}\approx 0{,}4773$

Задача 15. В коробке находятся 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Одновременно извлекают 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 2 синих и 2 красных.

Решение: всего: 3 + 4 + 3 = 10 карандашей в коробке.

$C_{10}^{6}=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24}=210$ способами можно извлечь 6 карандашей из коробки.

$C_{3}^{2}=3$ способами можно извлечь 2 синих карандаша.

$C_{4}^{2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{24}{4}=6$ способами можно извлечь 2 красных карандаша.

$C_{3}^{2}=3$ способами можно извлечь 2 зеленых карандаша.

$C_{3}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{3}^{2}=3\cdot 6\cdot 3=54$ способами можно извлечь искомый набор карандашей.

По классическому определению вероятности:

$p=\dfrac{C_{3}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{3}^{2}}{C_{10}^{6}}=\dfrac{54}{210}=\dfrac{9}{35}$ – вероятность того, что среди извлеченных 6 карандашей окажется 2 синих и 2 красных.

Ответ: $\dfrac{9}{35}\approx 0{,}2571$

Задача 16. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1 и 4 детали – заводом № 2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Решение: всего: 16 + 4 = 20 деталей.

$C_{20}^{2}=\frac{20!}{18!\cdot 2!}=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ способами можно выбрать две детали.

$C_{4}^{2}=6$ способами можно выбрать две детали, изготовленные заводом № 2.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_{4}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{6}{190}=\frac{3}{95}$ – вероятность того, что выбраны 2 детали, изготовленные заводом № 2.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$q=1-p=1-\frac{3}{95}=\frac{92}{95}$ – вероятность того, что среди двух выбранных деталей будет хотя бы одна, изготовленная заводом № 1.

Ответ: $\frac{92}{95}\approx 0{,}9684$

Задача 17. На сборку поступило десять деталей, среди которых четыре бракованные. Сборщик наудачу берёт три детали. Найти вероятности событий:

A – все детали бракованные;
B – только одна деталь из трёх бракованная;
C – хотя бы одна из взятых деталей бракованная.

Решение: найдём общее число исходов:

$C_{10}^{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120$ способами можно выбрать 3 детали из 10.

а) $C_{4}^{3}=4$ способами можно выбрать 3 бракованные детали.

По классическому определению:

$P(A)=\frac{C_{4}^{3}}{C_{10}^{3}}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$ – вероятность того, что все три детали будут бракованными.

б) $C_{4}^{1}=4$ способами можно выбрать одну бракованную деталь.

$C_{6}^{2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15$ способами можно выбрать 2 стандартные детали.

$C_{4}^{1}\cdot C_{6}^{2}=4\cdot 15=60$ способами можно выбрать искомую комбинацию деталей.

По классическому определению:

$P(B)=\frac{C_{4}^{1}\cdot C_{6}^{2}}{C_{10}^{3}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей только одна будет бракованной.

в) $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ способами можно извлечь 3 стандартные детали.

По классическому определению:

$P(\overline{C}) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$ – вероятность того, что все три извлечённые детали будут стандартными.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей хотя бы одна будет бракованной.

Ответ: а) $P(A) = \dfrac{1}{30} \approx 0{,}0333$, б) $P(B) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, в) $P(C) = \dfrac{5}{6} \approx 0{,}8333$

Задача 18. Из колоды в 36 карт наугад выбирают три карты. Найти вероятность того, что среди извлечённых трёх карт будет ровно 2 туза.

Решение:

$C_{36}^3 = \dfrac{36!}{33!\cdot 3!} = \dfrac{34\cdot 35\cdot 36}{6} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды.

$C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = \dfrac{24}{4} = 6$ способами можно извлечь двух тузов.

$C_{32}^1 = 32$ способами можно извлечь одну другую карту.

$C_4^2 \cdot C_{32}^1 = 6\cdot 32 = 192$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт.

По классическому определению:

$p = \dfrac{C_4^2\cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \dfrac{192}{7140} = \dfrac{16}{595} \approx 0{,}0269$ – вероятность того, что среди трёх извлеченных карт будет ровно два туза.

Ответ: $\dfrac{16}{595} \approx 0{,}0269$

Задача 19. Из колоды в 32 карты извлекают сразу три карты. Найти вероятность того, что эти карты будут дамой, семеркой и тузом.

Решение:

$C_{32}^3 = \dfrac{32!}{29!\cdot 3!} = \dfrac{30\cdot 31\cdot 32}{6} = 4960$ способами можно выбрать 3 карты из колоды.

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну даму;

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну семерку;

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одного туза;

$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$ способами можно выбрать искомую комбинацию карт.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1}{C_{32}^3}=\frac{64}{4960}=\frac{2}{155}$ – вероятность того, что из колоды будут извлечены дама, семерка и туз.

Ответ: $p=\frac{2}{155}\approx 0{,}013$

Задача 20. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Решение:

$C_{10}^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{120}=252$ способами можно выбрать 5 вагонов из десяти.

$C_2^2=1$ способом можно выбрать вагоны с номерами 2 и 5.

$C_8^3=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=56$ способами можно выбрать 3 других вагона.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_2^2\cdot C_8^3}{C_{10}^5}=\frac{1\cdot 56}{252}=\frac{2}{9}\approx 0{,}2222$ – вероятность того, среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5

Ответ: $\frac{2}{9}\approx 0{,}2222$

Задача 21. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные

Решение: всего: 15 + 5 = 20 магазинов в городе.

$C_{20}^3=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140$ способами можно выбрать 3 магазина для приватизации.

$C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно выбрать 3 непродовольственных магазинов для приватизации.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{10}{1140}=\frac{1}{114}\approx 0{,}0088$ – вероятность того, что все три выбранных для приватизации магазина непродовольственные.

Ответ: $\frac{1}{114}\approx 0{,}0088$

Задача 22. По делу проходят 50 фигурантов. Из них 15 являются свидетелями. Имеется возможность опросить 10 человек. Какова вероятность того, что среди опрошенных лиц окажется 5 свидетелей.

Решение:
$C_{50}^{10}=\frac{50!}{40!\cdot 10!}=\frac{41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=10272278170$ способами можно выбрать 10 человек из 50.

$C_{15}^{5}=\frac{15!}{10!\cdot 5!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{120}=3003$ способами можно выбрать 5 свидетелей из 15.

$C_{35}^{5}=\frac{35!}{30!\cdot 5!}=\frac{31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35}{120}=324632$ способами можно выбрать 5 других фигурантов из 35.

По классическому определению вероятности:
$p=\frac{C_{15}^{5}\cdot C_{35}^{5}}{C_{50}^{10}}=\frac{3003\cdot 324632}{10272278170}\approx 0{,}0949$ – вероятность того, что среди 10 фигурантов окажутся ровно 5 свидетелей.

Ответ: $p\approx 0{,}0949$

Задача 23. В партии сотовых телефонов, состоящих из 4 неисправных и 16 исправных, для проверки выбирают три. Найти вероятность того, что только два исправны.

Решение: всего: 4 + 16 = 20 телефонов в партии.

$C_{20}^{3}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140$ способами можно выбрать 3 телефона.

$C_{16}^{2}=\frac{16!}{14!\cdot 2!}=\frac{15\cdot 16}{2}=120$ способами можно выбрать два исправных телефона.

$C_{4}^{1}=4$ способами можно выбрать 1 неисправный телефон.

$C_{16}^{2}\cdot C_{4}^{1}=120\cdot 4=480$ способами можно выбрать искомую комбинацию телефонов.

По классическому определению:
$p=\frac{C_{16}^{2}\cdot C_{4}^{1}}{C_{20}^{3}}=\frac{480}{1140}=\frac{8}{19}\approx 0{,}4211$ – вероятность того, что из трех выбранных телефонов исправными являются только два.

Ответ: $\frac{8}{19}\approx 0{,}4211$

Задача 24. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся:

а) только женские шубы;

б) только мужские или только женские шубы.

Решение: всего: 10 + 6 = 16 шуб в магазине.

$C_{16}^3 = \frac{16!}{13!\cdot 3!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16}{6} = 560$ способами можно выбрать 3 шубы.

а) $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$ способами можно выбрать 3 женские шубы.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{120}{560} = \frac{3}{14} \approx 0{,}2143$ – вероятность того, что среди трёх отобранных шуб окажутся только женские шубы.

б) $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ способами можно выбрать 3 мужские шубы.

По правилу сложения комбинаций: $C_{10}^3 + C_6^3 = 120 + 20 = 140$ способами можно выбрать только мужские или только женские шубы.

По классическому определению вероятности:

$p^* = \frac{C_{10}^3 + C_6^3}{C_{16}^3} = \frac{140}{560} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ – вероятность того, что среди трёх отобранных шуб окажутся только женские шубы или только мужские шубы.

Ответ: а) $\frac{3}{14} \approx 0{,}2143$ б) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

Задача 25. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что он ответит на три вопроса билета?

Решение:

$C_{25}^3 = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{6} = 2300$ способами можно выбрать 3 вопроса из 25;

$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!\cdot 3!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} = 1140$ способами можно выбрать 3 вопроса из 20, на которые студент знает ответ.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{1140}{2300} = \frac{57}{115} \approx 0{,}5$ – вероятность того, что студент ответит на три вопроса билета.

Ответ: $p = \frac{57}{115} \approx 0{,}5$

Задача 26. Готовясь к экзамену, студент не успел выучить 15 вопросов из 45. Какова вероятность того, что он вытащит билет, в котором не знает 1 вопрос, если всего в билете 4 вопроса?

Решение: найдём общее число исходов:
$C_{45}^{4}=\frac{45!}{41!\cdot 4!}=\frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{24}=148995$ способами можно выбрать 4 вопроса из 45.

Найдём благоприятствующее число исходов:

$C_{15}^{1}=15$ способами можно выбрать один вопрос, на который студент не знает ответа;
$C_{30}^{3}=\frac{30!}{27!\cdot 3!}=\frac{28\cdot 29\cdot 30}{6}=4060$ способами можно выбрать3 вопроса, на которые студент знает ответ;

$C_{15}^{1}\cdot C_{30}^{3}=15\cdot 4060=60900$ способами можно выбрать искомую комбинацию вопросов.

По классическому определению:
$p=\frac{C_{15}^{1}\cdot C_{30}^{3}}{C_{45}^{4}}=\frac{60900}{148995}=\frac{580}{1419}$ – вероятность того, что студент вытащит билет, в котором не знает ответа на 1 вопрос из 4.

Ответ: $p=\frac{580}{1419}\approx 0{,}41$

Задача 27. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Решение: найдём общее число исходов:
$n!=8!=40320$ способами можно расставить 8 книг на одной полке.

Без учёта перестановок 2 определенные книги могут оказаться рядом в 7 случаях, с учётом перестановок этих 2 книг – в 14 случаях.

Для каждого из 14 случаев оставшиеся шесть книг можно расставить $6!=720$ способами. Поэтому существует $14\cdot 6!=14\cdot 720=10080$ благоприятствующих комбинаций – когда две определённые книги оказываются рядом.

По классическому определению:
$p=\frac{10080}{40320}=\frac{1}{4}$ – вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Ответ: $p=\frac{1}{4}$

Задача 28. 11 человек случайным образом садятся на десятиместную скамейку. Найти вероятность того, что три определённых лица окажутся рядом.

Решение: найдём общее число исходов: $C_{11}^{10} = 11$ способами можно выбрать 10 человек для рассадки на скамейку. Из полученного количества сочетаний необходимо исключить 3 случая, когда одному из трёх нужных людей не достанется места:

$C_{11}^{10} - 3 = 11 - 3 = 8$

Каждую десятку можно рассадить $P_{10} = 10!$ способами.

Таким образом, общее количество исходов: $(C_{11}^{10} - 3) \cdot P_{10} = 8 \cdot 10!$

Найдём благоприятствующее число исходов. Три искомых человека без учёта перестановок могут оказаться рядом 8 способами:

1	2	3							
	1	2	3						
		1	2	3					
			1	2	3				
				1	2	3			
					1	2	3		
						1	2	3	
							1	2	3

А с учётом их перестановок в каждой тройке: $8 \cdot P_3 = 8 \cdot 3!$ способами. Для каждого из $8 \cdot 3!$ вариантов можно выбрать 7 других людей $C_8^7 = 8$ способами, которые могут рассесться на оставшихся семи местах $P_7 = 7!$ способами. Таким образом, количество благоприятствующих исходов: $8 \cdot P_3 \cdot C_8^7 \cdot 7! = 8 \cdot 3! \cdot 8 \cdot 7!$ *(примечание: $C_8^7 \cdot 7! = A_8^7$ способами можно выбрать 7 других людей и разместить их по семи оставшимся местам)*.

По классическому определению:

$p = \dfrac{8 \cdot 3! \cdot 8 \cdot 7!}{8 \cdot 10!} = \dfrac{6 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15} \approx 0{,}0667$ – вероятность того, что три определённых человека окажутся рядом.

Ответ: $\dfrac{1}{15} \approx 0{,}0667$

Задача 29. В пакете находится 20 семян, среди которых 17 – всхожие. Какова вероятность того, что из трех высаженных семян окажутся невсхожими два.

Решение: найдём общее число исходов: $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{17! \cdot 3!} = \dfrac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$ способами можно выбрать 3 семени из 20.

Найдём благоприятствующее количество исходов:

$C_3^2 = 3$ способами можно выбрать два невсхожих семени.

$C_{17}^1 = 17$ способами можно выбрать одно всхожее семя.

$C_3^2 \cdot C_{17}^1 = 3 \cdot 17 = 51$ способом можно выбрать искомую комбинацию семян.

По классическому определению:

$p=\dfrac{C_3^2\cdot C_{17}^1}{C_{20}^3}=\dfrac{51}{1140}=\dfrac{17}{380}\approx 0{,}0447$ – вероятность того, что из трех высаженных семян окажутся невсхожими два.

Ответ: $\dfrac{17}{380}\approx 0{,}0447$

Задача 30. На новогодней елке присутствуют 20 девочек и 10 мальчиков. За участие в конкурсе призы получат 6 человек. Какова вероятность того, что среди получивших призы будет поровну мальчиков и девочек?

Решение: всего: 20 + 10 = 30 детей на новогодней елке.

$C_{30}^6=\dfrac{30!}{24!\cdot 6!}=\dfrac{25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{720}=593775$ способами можно выбрать 6 детей для получения призов.

$C_{20}^3=\dfrac{20!}{17!\cdot 3!}=\dfrac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140$ способами можно выбрать 6 девочек.

$C_{10}^3=\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120$ способами можно выбрать 6 мальчиков.

По правилу умножения комбинаций и классическому определению вероятности:

$p=\dfrac{C_{20}^3\cdot C_{10}^3}{C_{30}^6}=\dfrac{1140\cdot 120}{593775}=\dfrac{13485}{55389}=\dfrac{608}{2639}$ – искомая вероятность.

Ответ: $p=\dfrac{608}{2639}\approx 0{,}23$

Задача 31. В бункере хранятся изделия 4 сортов, причем изделий первого сорта 20 штук, изделий второго сорта 50, изделий третьего сорта 20, четвертого – 30. Для контроля наугад берут 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них 1 изделие первого сорта, 3 – второго, 1 – третьего, 2 – четвертого.

Решение: всего: $n=20+50+20+30=120$ изделий.

Объём выборки: $m=1+3+1+2=7$ штук.

$C_{120}^7=\dfrac{120!}{113!\cdot 7!}=59487568920$ способами можно выбрать 7 изделий из 120.

$C_{20}^1=20$ способами можно выбрать изделие 1-го сорта;

$C_{50}^3=\dfrac{50!}{47!\cdot 3!}=\dfrac{48\cdot 49\cdot 50}{6}=19600$ способами можно выбрать три изделия 2-го сорта;

$C_{20}^1=20$ способом можно выбрать одно изделие 3-го сорта;

$C_{30}^2=\dfrac{30!}{28!\cdot 2!}=\dfrac{29\cdot 30}{2}=435$ способами можно выбрать два изделия 4-го сорта.

$C_{20}^1\cdot C_{50}^3\cdot C_{20}^1\cdot C_{30}^2=20\cdot 19600\cdot 20\cdot 435=3410400000$ – способами можно выбрать искомую комбинацию изделий.

По классическому определению:

$$p=\frac{C_{20}^{1}\cdot C_{50}^{3}\cdot C_{20}^{1}\cdot C_{30}^{2}}{C_{120}^{7}}=\frac{3410400000}{59487568920}\approx 0{,}05733$$ – искомая вероятность.

Ответ: $p\approx 0{,}05733$

Задача 32. В ящике десять стандартных изделий и пять бракованных. Наугад извлекают три детали. Каковы вероятности того, что среди них: а) одна бракованная, б) две бракованных, в) хотя бы одна стандартная?

Решение: всего: 10 + 5 = 15 деталей в ящике.

$C_{15}^{3}=\frac{15!}{12!\cdot 3!}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{6}=455$ способами можно извлечь три детали из ящика.

а) Рассмотрим событие: A – среди трех извлеченных деталей будет ровно одна бракованная.

$C_{5}^{1}=5$ способами можно извлечь одну бракованную деталь;

$C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45$ способами можно извлечь две стандартные детали.

$C_{5}^{1}\cdot C_{10}^{2}=5\cdot 45=225$ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.

По классическому определению вероятности: $P(A)=\frac{C_{5}^{1}\cdot C_{10}^{2}}{C_{15}^{3}}=\frac{225}{455}=\frac{45}{91}\approx 0{,}49$

б) Рассмотрим событие: B – среди трех извлеченных деталей будет ровно две бракованных.

$C_{5}^{2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно извлечь две бракованные детали;

$C_{10}^{1}=10$ способами можно извлечь одну стандартную деталь.

$C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{1}=10\cdot 10=100$ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.

По классическому определению: $P(B)=\frac{C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{1}}{C_{15}^{3}}=\frac{100}{455}=\frac{20}{91}\approx 0{,}22$

в) Рассмотрим события: C – среди трех извлеченных деталей будет хотя бы одна стандартная, $\overline{C}$ – все три детали будут бракованными.

Данные события являются противоположными, по соответствующей теореме:
$P(C)+P(\overline{C})=1$

$C_{5}^{3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно извлечь три бракованные детали.

По классическому определению: $P(\overline{C})=\frac{C_{5}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{10}{455}=\frac{2}{91}$.

Таким образом: $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2}{91}=\frac{89}{91}\approx 0{,}98$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $P(A)=\frac{45}{91}\approx 0{,}49$, б) $P(B)=\frac{20}{91}\approx 0{,}22$, $P(C)=\frac{89}{91}\approx 0{,}98$

Задача 33. В лотерее разыгрываются 1000 билетов, из которых 100 – выигрышные. Покупают три билета. Какова вероятность того, что только один из них выигрышный?

Решение:
$C_{1000}^{3}=\frac{1000!}{997!\cdot 3!}=\frac{998\cdot 999\cdot 1000}{6}=166167000$ способами можно выбрать 3 билета из 1000.

$C_{100}^{1}=100$ способами можно выбрать один выигрышный билет.
$C_{900}^{2}=\frac{900!}{898!\cdot 2!}=\frac{899\cdot 900}{2}=404550$ способами можно выбрать два безвыигрышных билета.
$C_{100}^{1}\cdot C_{900}^{2}=100\cdot 404550=40455000$ способами можно выбрать искомую комбинацию билетов.

По классическому определению вероятности:
$p=\frac{C_{100}^{1}\cdot C_{900}^{2}}{C_{1000}^{3}}=\frac{40455000}{166167000}=\frac{13485}{55389}$ – вероятность того, что среди трех купленных билетов выигрышным будет только один.

Ответ: $p=\frac{13485}{55389}\approx 0{,}24$

Задача 34. В корзине 15 шаров, из них 5 – красных, 5 – синих и 5 – желтых. Достают наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди них 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара?

Решение: найдём общее число исходов:
$C_{15}^{4}=\frac{15!}{11!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24}=1365$ способами можно выбрать 4 шара из корзины.

Найдём количество благоприятствующих исходов:
$C_{5}^{1}=5$ способами можно выбрать один красный шар;
$C_{5}^{1}=5$ способами можно выбрать один синий шар;
$C_{5}^{2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно выбрать два желтых шара;

$C_{5}^{1}\cdot C_{5}^{1}\cdot C_{5}^{2}=5\cdot 5\cdot 10=250$ способами можно выбрать искомую комбинацию шаров.

По классическому определению вероятности:
$p=\frac{C_{5}^{1}\cdot C_{5}^{1}\cdot C_{5}^{2}}{C_{15}^{4}}=\frac{250}{1365}=\frac{50}{273}$ – вероятность того, что среди четырех извлеченных шаров будет 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара.

Ответ: $p=\frac{50}{273}\approx 0{,}18$

Задача 35. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

Решение: найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:
$l=\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{1000}=10$ кубиков.

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 8 * 12 ребер = 96 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 8 * 8 * 6 граней = 384 кубиков.
Неокрашенных кубиков: 1000 – 8 – 96 – 384 = 512 кубиков.

$C_{1000}^{1}=1000$ способами можно извлечь 1 кубик.

$C_{96}^{1}=96$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями.

По классическому определению вероятности, вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани:

$$p=\frac{C_{96}^{1}}{C_{1000}^{1}}=\frac{96}{1000}=0{,}096$$

Ответ: $0{,}096$

Задача 36. Куб с окрашенными гранями распилен на $n=216$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме 2 окрашенные грани.

Решение: найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:
$l=\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{216}=6$ кубиков.

Кубиков с тремя окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 4 * 12 ребер = 48 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 4 * 4 * 6 граней = 96 кубиков.
Неокрашенных кубиков: 216 – 8 – 48 – 96 = 64 кубика.

$C_{216}^{3}=\frac{216!}{213!\cdot 3!}=\frac{214\cdot 215\cdot 216}{6}=1656360$ способами можно извлечь 3 кубика.

$C_{48}^{1}\cdot C_{64}^{2}=48\cdot\frac{63\cdot 64}{2}=96768$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

$C_{96}^{2}\cdot C_{64}^{1}=\frac{95\cdot 96}{2}\cdot 64=291840$ способами можно извлечь 2 кубика с одной окрашенной гранью и один неокрашенный кубик.

По правилу сложения комбинаций: $C_{48}^{1}\cdot C_{64}^{2}+C_{96}^{2}\cdot C_{64}^{1}=96768+291840=388608$ способами можно извлечь 3 кубика с двумя окрашенными гранями

По классическому определению:
$p=\dfrac{C_{48}^{1}\cdot C_{64}^{2}+C_{96}^{2}\cdot C_{64}^{1}}{C_{216}^{3}}=\dfrac{388608}{1656360}\approx 0{,}23$ – вероятность того, что у трёх извлеченных кубика будет в сумме две окрашенных грани.

Ответ: $\approx 0{,}23$

Задача 37. Куб с окрашенными гранями распилен на $n=1000$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме $k=3$ окрашенных грани.

Решение: найдем длину ребра куба в пересчёте на распиленные кубики:
$l=\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{1000}=10$ кубиков.

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 8 * 12 ребер = 96 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 8 * 8 * 6 граней = 384 кубика.
Неокрашенных кубиков: 1000 – 8 – 96 – 384 = 512 кубиков.

$C_{1000}^{3}=\dfrac{1000!}{997!\cdot 3!}=\dfrac{998\cdot 999\cdot 1000}{6}=166167000$ способами можно извлечь 3 кубика (общее число исходов).

1) $C_{8}^{1}\cdot C_{512}^{2}=8\cdot\dfrac{511\cdot 512}{2}=1046528$ способами можно извлечь 1 кубик с тремя окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

2) $C_{96}^{1}\cdot C_{384}^{1}\cdot C_{512}^{1}=96\cdot 384\cdot 512=18874368$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями, 1 кубик с одной окрашенной гранью и 1 неокрашенный кубик.

3) $C_{384}^{3}=\dfrac{382\cdot 383\cdot 384}{6}=9363584$ способами можно извлечь 3 кубика с одной окрашенной гранью.

Складываем количество благоприятствующих исходов:
$C_{8}^{1}\cdot C_{512}^{2}+C_{96}^{1}\cdot C_{384}^{1}\cdot C_{512}^{1}+C_{384}^{3}=1046528+18874368+9363584=29284480$ способами можно извлечь 3 кубика, суммарное количество окрашенных граней которых равно трём.

По классическому определению:
$p=\dfrac{C_{8}^{1}\cdot C_{512}^{2}+C_{96}^{1}\cdot C_{384}^{1}\cdot C_{512}^{1}+C_{384}^{3}}{C_{1000}^{3}}=\dfrac{29284480}{166167000}\approx 0{,}1762$ – искомая вероятность.

Ответ: $\approx 0{,}1762$