Прямая на плоскости. Основные формулы

1. Уравнение прямой. Виды и формулы

1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k – *угловой коэффициент*.

1.2. Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C не равны нулю одновременно.

1.3. Каноническое уравнение прямой: $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$, как вариант, в виде $p_2 \cdot (x - x_0) = p_1 \cdot (y - y_0)$, где $\bar{p}(p_1;\ p_2)$ – направляющий вектор данной прямой, а $M(x_0;\ y_0)$ – принадлежащая ей точка.

1.4. Уравнение прямой по двум её точкам $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, либо $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$, если разность $x_2 - x_1$ или $y_2 - y_1$ равна нулю.

1.5. Уравнение прямой по её точке $M(x_0;\ y_0)$ и вектору нормали $\bar{n}(n_1; n_2)$: $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$

1.5. Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{M} + \frac{y}{N} = 1$, где $M \neq 0,\ N \neq 0$.

1.6. Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = p_1 t + x_0 \\ y = p_2 t + y_0 \end{cases}$.

2. Направляющий вектор прямой

Если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то $\bar{p}(-B;\ A)$ – её направляющий вектор.

3. Вектор нормали прямой (нормальный вектор)

Если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ в декартовой СК, то $\bar{n}(A;\ B)$ – её вектор нормали.

4. Линейные неравенства двух переменных

Неравенства $Ax + By + C < 0$, $Ax + By + C > 0$ определяют две полуплоскости относительно прямой $Ax + By + C = 0$. В нестрогих случаях $Ax + By + C \le 0$, $Ax + By + C \ge 0$ присоединяется прямая. Если какая-либо точка, не лежащая на прямой $Ax + By + C = 0$, удовлетворяет неравенству, то и все точки этой полуплоскости тоже удовлетворяют данному неравенству; то же самое наоборот.

5. Взаимное расположение двух прямых

Прямые $d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,\quad d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ могут:

1) совпадать, тогда их соответствующие координаты пропорциональны:
$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$;

2) быть параллельными: $d_1 \parallel d_2$, тогда $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$;

3) или пересекаться в точке: $M = d_1 \cap d_2$, в этом случае не существует такого значения λ, что $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$, и определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Если прямые пересекаются, то координаты точки M – есть в точности решение системы $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$.

© https://mathprofi.ru, Высшая математика – просто и доступно!

6. Формулы деления отрезка в данном отношении

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$x_M = \dfrac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}$, $y_M = \dfrac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$. В частности, если отрезок делится пополам, то:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ *(формулы координат середины отрезка)*.

7. Прямая, параллельная данной

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ **п**араллельно прямой $d: Ax + By + C = 0$, можно составить по этой точке и направляющему вектору $\bar{p}(-B; A)$ (см. п. 1.3.).

8. Прямая, перпендикулярная данной

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ **п**ерпендикулярно прямой $d: Ax + By + C = 0$, можно составить по этой точке и направляющему вектору $\bar{n}(A; B)$ *(вектору нормали прямой d)*.

9. Расстояние от точки до прямой

Если прямая $d: Ax + By + C = 0$ задана в декартовой системе координат, то расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до этой прямой можно найти по формуле:

$$\rho(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

10. Точка, симметричная данной относительно прямой

Чтобы найти точку N, симметричную точке $M(x_0; y_0)$ относительно прямой $d: Ax + By + C = 0$:

1) нужно составить уравнение прямой NM по точке M и направляющему вектору $\bar{n}(A; B)$ (п. 8),
2) найти точку $S = d \cap NM$ пересечения прямых (п. 5.3) и
3) воспользоваться формулами координат середины отрезка (п. 6).

11. Расстояние между параллельными прямыми

Чтобы найти расстояние между параллельными прямыми в декартовой системе координат достаточно взять любую точку одной из этих прямых и воспользоваться формулой п. 9.

12. Угол между прямыми

Если прямые $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ заданы в декартовой системе координат, то *ориентированный* угол φ между ними можно вычислить с помощью формулы:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}$, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, **2)** $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$, когда прямые представлены виде $d_1: y = k_1x + b_1$, $d_2: y = k_2x + b_2$, **3)** и кроме того, можно вычислить неориентированный угол α с помощью скалярного произведения направляющих векторов этих прямых $\cos\alpha = \dfrac{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2}{|\bar{p}_1| \cdot |\bar{p}_2|}$, однако он может оказаться тупым, и тогда за угол между прямыми следует принять $\gamma = \pi - \alpha$.

© https://mathprofi.ru, Высшая математика – просто и доступно!